

Verificação Formal (2025/25)

Rocq (1)

Crie um ficheiro Rocq para desenvolver as provas das propriedades a seguir apresentadas.

1 Lógica proposicional

Prove as seguintes tautologias da lógica proposicional:

1. $(A \vee B) \vee C \rightarrow A \vee (B \vee C)$
2. $(B \rightarrow C) \rightarrow A \vee B \rightarrow A \vee C$
3. $(A \wedge B) \wedge C \rightarrow A \wedge (B \wedge C)$
4. $A \vee (B \wedge C) \rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
5. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \leftrightarrow A \wedge (B \vee C)$
6. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \leftrightarrow A \vee (B \wedge C)$

2 Lógica de primeira ordem

Prove os seguintes teoremas da lógica de primeira ordem:

1. $(\exists x.P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x)) \wedge (\exists x.Q(x))$
2. $(\exists x.\forall y.P(x, y)) \rightarrow \forall y.\exists x.P(x, y)$
3. $(\exists x.P(x)) \rightarrow (\forall x.\forall y.P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow \forall y.Q(y)$
4. $(\forall x.Q(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x.P(x) \wedge R(x)$
5. $(\forall x.P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x)) \rightarrow \exists y.Q(y)$
6. $(\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x)) \leftrightarrow (\exists x.P(x) \vee Q(x))$

3 Lógica clássica

Assumindo o *princípio do meio excluído* como axioma, prove que:

1. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (*lema de Pierce*)
2. $\neg\neg A \rightarrow A$
3. $\neg\forall x.P(x) \rightarrow \exists x.\neg P(x)$