**Cálculo de Sistemas de Informação**
Perfil: MÉTODOS FORMAIS DE PROGRAMAÇÃO

1.º Ano de MEI e MMC, Universidade do Minho
Ano Lectivo de 2025/26

Teste — 16 de Janeiro de 2026, 10h00–12h00
Sala E7-1.09

---

*Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo **médio** estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*

*Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

PROVA COM CONSULTA (2 horas)

**Questão 1** Demonstre a seguinte propriedade da união de duas relações:

$$M \cup N \text{ é injectiva} \quad \equiv \quad M, N \text{ são injectivas e } M^\circ \cdot N \subseteq id \tag{F1}$$

---

RESOLUÇÃO: Vamos tomar por base a regra da simplicidade da reunião:

$$M \cup N \text{ is simple} \quad \equiv \quad M, N \text{ are simple and } M \cdot N^\circ \subseteq id \tag{F2}$$

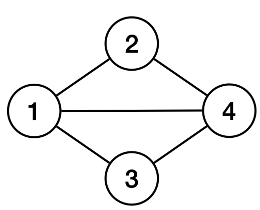
Assim:

$$\begin{array}{ll}
& M \cup N \text{ injectiva} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (M \cup N)^\circ \text{ simples} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& M^\circ \cup N^\circ \text{ simples} \\
\equiv & \quad \{ \text{ (F2) } \} \\
& M^\circ, N^\circ \text{ simples e } M^\circ \cdot N \subseteq id \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& M, N \text{ injectivas e } M^\circ \cdot N \subseteq id
\end{array}$$

□

---

**Questão 2** Em MFES foi abordado, em Z3, o conhecido *graph colouring problem*. Em particular, para o grafo




(F3)

questionou-se se ele poderia ser colorido com três cores, estando o problema sujeito aos requisitos seguintes:

$$\textit{\# At least one colour per vertex} \tag{F4}$$
$$\textit{\# At most one colour per vertex} \tag{F5}$$
$$\textit{\# Adjacent vertices have different colours} \tag{F6}$$

Sendo o mesmo problema abordado nesta UC, alguém definiu as relações

$$Vertex \xleftarrow{Adj} Vertex \xrightarrow{color} Color \tag{F7}$$

a que apenas acrescentou o tipo relacional

$$color : Adj \to (\neq) \tag{F8}$$

onde $(\neq) = id \Rightarrow \bot$, isto é, $y \neq x \;\Leftrightarrow\; \neg\,(y = x)$.

Serão (F7,F8) suficientes para definir formalmente o problema? Justifique a sua resposta.

---

RESOLUÇÃO: Os requisitos (F4) + (F5) correspondem a dizer que *color* é uma **função** em (F7). Expansão de (F8):

$$
\begin{array}{ll}
 & color : Adj \to (\neq) \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
 & color \cdot Adj \;\subseteq\; (\neq) \cdot color \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
 & v' \; Adj \; v \Rightarrow color \; v' \neq color \; v
\end{array}
$$

como se exige em (F6): *Adjacent vertices have different colours.*
□

---

**Questão 3** O grafo (F3) acima representa uma relação $Vertex \xleftarrow{Adj} Vertex$ que é simétrica, isto é, em que cada arco não orientado $a$ — $b$ significa $b \; Adj \; a \wedge a \; Adj \; b$. Considerando $Vertex = \mathbb{N}_0$, inspecione (F3) por forma a poder responder afirmativa ou negativamente às conjecturas seguintes: a relação $Adj$ representada por (F3) é

1. simples
2. sobrejectiva
3. irreflexiva
4. difuncional

---

RESOLUÇÃO: Representação matricial:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 1 | 1 | |
| 2 | 1 | | | 1 | |
| 3 | 1 | | | 1 | |
| 4 | 1 | 1 | 1 | | |
| ⋮ | | | | | |

Então:

1. simples — Não (porquê?)
2. sobrejectiva — Não (pois $Vertex = \mathbb{N}_0$)
3. irreflexiva — Sim (porquê?)
4. difuncional – Não (há colunas não disjuntas que não são iguais.)

□

---

**Questão 4** Uma relação diz-se *circular* quando $R \cdot R \subseteq R \subseteq R^\circ$. Será uma tal relação $R$ uma relação difuncional? Justifique formlmente a sua resposta.

---

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{array}{cl}
 & R \cdot R^\circ \cdot R \subseteq R \\
\equiv & \qquad \{ \text{ simetria } R^\circ = R \ \} \\
 & R \cdot R \cdot R \subseteq R \\
\Leftarrow & \qquad \{ \text{ transitividade } R \cdot R \subseteq R \ \} \\
 & R \cdot R \subseteq R \\
\equiv & \qquad \{ \text{ transitividade } R \cdot R \subseteq R \ \} \\
 & \text{TRUE}
\end{array}
$$

□

---

**Questão 5** Recorde o problema *'Library Loan'* estudado nas aulas,

$$
\begin{tikzcd}
 & ISBN & Name & \\
Title & Book \arrow[l, "title"'] \arrow[u, "isbn"'] \arrow[r, "R"] \arrow[d, "Auth"'] & User \arrow[u, "name"'] \arrow[r, "addr"'] \arrow[d, "card"] & Address \\
 & Author & Id &
\end{tikzcd}
$$

em que $u \ R \ b$ significa

> "o utilizador $u$ tem de momento o livro $b$ requisitado"

e $R$ está por isso sujeita ao invariante:

$$\mathsf{inv}\ R = \text{img } R \subseteq id \tag{F9}$$

Considere a operação

$$quit\ u\ R = \Phi_{(\neq u)} \cdot R$$

pela qual um utilizador $u$ devolve todos os livros que tinha requisitado. Calcule a pré-condição mais fraca que dá a garantia de que a operação $quit\ u$ preserva o invariante (F9).

---

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{array}{cl}
& \mathsf{inv}\ (quit\ u\ R) \\
\equiv & \qquad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \mathsf{inv}\ (\Phi_{(\neq u)} \cdot R) \\
\equiv & \qquad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \Phi_{(\neq u)} \cdot R \cdot R^\circ \cdot \Phi_{(\neq u)} \ \subseteq\ id \\
\Leftarrow & \qquad \{ \ \Phi_{(\neq u)} \ \subseteq\ id \text{ permite subir o lado inferior } (2\times) \ \} \\
& R \cdot R^\circ \ \subseteq\ id \\
\equiv & \qquad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \mathsf{inv}\ R
\end{array}
$$

Tendo-se $\mathsf{inv}\ R \Rightarrow \mathsf{inv}\ (quit\ u\ R)$, o invariante é preservado sem necessidade de qualquer pré-condição.

Isso era fácil de antecipar: em $\mathrm{img}\ R\ \subseteq\ id$, $R$ está no lado inferior; logo, por monotonia, diminuir $R$ só reforça a condição. $\square$

---

**Questão 6** A chamada *diagonal* $R_d$ de uma relação $R$ é um relação com o mesmo tipo que satisfaz a seguinte propriedade universal:

$$
X \ \subseteq\ R_d \quad \equiv \quad \left\{ \begin{array}{l} X \ \subseteq\ R \\ R \cdot X^\circ \cdot R \ \subseteq\ R \end{array} \right. \tag{F10}
$$

Mostre, recorrendo à igualdade indirecta e propriedades das divisões relacionais que conhece, que $R_d$ é a relação:

$$
R_d \quad = \quad R \cap (R \setminus R \,/\, R)^\circ \tag{F11}
$$

---

RESOLUÇÃO: Tem-se (completar as justificações):

$$
\begin{array}{cl}
& R_d = R \cap (R \setminus R \,/\, R)^\circ \\
\equiv & \qquad \{ \text{ igualdade indirecta } \} \\
& X \ \subseteq\ R_d \ \Leftrightarrow\ X \ \subseteq\ R \cap (R \setminus R \,/\, R)^\circ \\
\equiv & \qquad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& X \ \subseteq\ R_d \ \Leftrightarrow\ \left\{ \begin{array}{l} X \ \subseteq\ R \\ X^\circ \ \subseteq\ (R \setminus R \,/\, R) \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& X \ \subseteq\ R_d \ \Leftrightarrow\ \left\{ \begin{array}{l} X \ \subseteq\ R \\ R \cdot X^\circ \ \subseteq\ R \,/\, R \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& X \ \subseteq\ R_d \ \Leftrightarrow\ \left\{ \begin{array}{l} X \ \subseteq\ R \\ R \cdot X^\circ \cdot R \ \subseteq\ R \end{array} \right.
\end{array}
$$

□

---

**Questão 7** Assumindo definida a ordem parcial $x \sqsubseteq y$, designando que a lista $x$ é prefixo da lista $y$, recorde a especificação formal da função take (Haskell) que foi abordada nas aulas,

$$\mathsf{length}\ ys \leqslant n \wedge ys \sqsubseteq xs \quad\Leftrightarrow\quad ys \sqsubseteq \mathsf{take}\ n\ xs \tag{F12}$$

e ainda a da função $m \sqcap n$ (*mínimo* de dois naturais $m$ e $n$):

$$a \leqslant m \wedge a \leqslant n \ \Leftrightarrow\ a \leqslant m \sqcap n \tag{F13}$$

Pretende-se mostrar, mesmo sem sabermos a definção de take, que a seguinte propriedade é válida:

$$(\mathsf{take}\ m) \cdot (\mathsf{take}\ n) = \mathsf{take}\ (m \sqcap n)$$

Complete a seguinte prova desse facto com justificações e/ou os passos omitidos:

$$
\begin{array}{ll}
 & ys \sqsubseteq \mathsf{take}\ m\ (\mathsf{take}\ n\ xs) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \mathsf{length}\ ys \leqslant m \wedge ys \sqsubseteq \mathsf{take}\ n\ xs \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \ldots\ldots \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \mathsf{length}\ ys \leqslant (m \sqcap n) \wedge ys \sqsubseteq xs \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \ldots\ldots \\
:: & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \mathsf{take}\ m\ (\mathsf{take}\ n\ xs)) = \mathsf{take}\ (m \sqcap n)\ xs
\end{array}
$$

---

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{array}{ll}
 & ys \sqsubseteq \mathsf{take}\ m\ (\mathsf{take}\ n\ xs) \\
\equiv & \quad \{ \text{ CG (F12) } \} \\
 & \mathsf{length}\ ys \leqslant m \wedge ys \sqsubseteq \mathsf{take}\ n\ xs \\
\equiv & \quad \{ \text{ CG (F12) de novo } \} \\
 & \mathsf{length}\ ys \leqslant m \wedge \mathsf{length}\ ys \leqslant n \wedge ys \sqsubseteq xs \\
\equiv & \quad \{ \text{ CG (F13)} : a \leqslant x \wedge a \leqslant y \ \Leftrightarrow\ a \leqslant x \sqcap y \} \\
 & \mathsf{length}\ ys \leqslant (m \sqcap n) \wedge ys \sqsubseteq xs \\
\equiv & \quad \{ \text{ CG (F12) de novo } \} \\
 & ys \sqsubseteq \mathsf{take}\ (m \sqcap n)\ xs \\
:: & \quad \{ \text{ igualdade indirecta } \} \\
 & \mathsf{take}\ m\ (\mathsf{take}\ n\ xs)) = \mathsf{take}\ (m \sqcap n)\ xs \\
\equiv & \quad \{ \text{ passagem para } \textit{pointfree} \} \\
 & (\mathsf{take}\ m) \cdot (\mathsf{take}\ n) = \mathsf{take}\ (m \sqcap n)
\end{array}
$$

□

**Questão 8** Derive o teorema grátis da função polimórfica que a seguir se define em Haskell,

$$concatMap :: (a \to [b]) \to [a] \to [b]$$
$$concatMap\ f\ x = \mathsf{concat}\ [f\ a \mid a \leftarrow x]$$

e instancie-o para o caso em que todas as relações em jogo são funções. Documente a sua resolução com os quadrados "mágicos" nela envolvidos.

RESOLUÇÃO: O teorema grátis corresponde ao tipo relacional $concatMap : (A \to B^*) \to (A^* \to B^*)$ que é equivalente à seguinte implicação de *quadrados mágicos*:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & C \arrow[l, "R"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, "\subseteq"] \\ B^* & D^* \arrow[l, "S^*"] \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} A^* \arrow[d, "concatMap\ f"'] & C^* \arrow[l, "R^*"'] \arrow[d, "concatMap\ g"] \arrow[dl, phantom, "\subseteq"] \\ B^* & D^* \arrow[l, "S^*"] \end{tikzcd}$$

Isto é:

$$f \cdot R \subseteq S^* \cdot g \quad \Rightarrow \quad concatMap\ f \cdot R^* \subseteq S^* \cdot concatMap\ g$$

Para funções ($R := r$,$S := s$) estes reduzem-se a:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & C \arrow[l, "r"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, "="] \\ B^* & D^* \arrow[l, "\mathsf{map}\ s"] \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} A^* \arrow[d, "concatMap\ f"'] & C^* \arrow[l, "\mathsf{map}\ r"'] \arrow[d, "concatMap\ g"] \arrow[dl, phantom, "="] \\ B^* & D^* \arrow[l, "\mathsf{map}\ s"] \end{tikzcd}$$

isto é:

$$f \cdot r = \mathsf{map}\ s \cdot g \Rightarrow concatMap\ f \cdot \mathsf{map}\ r = \mathsf{map}\ s \cdot concatMap\ g$$

$\square$