

**Cálculo de Sistemas de Informação**  
Perfil: MÉTODOS FORMAIS DE PROGRAMAÇÃO

1.º Ano de MEI e MMC, Universidade do Minho  
Ano Lectivo de 2024/25

1º Teste — 24 de Abril de 2025, 09h00–11h00  
Sala E2-2.12

---

*Esta prova consta de 8 questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo **médio** estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*

*Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

PROVA COM CONSULTA (2 horas)

**Questão 1** Demonstre a equivalência

$$\underline{a} \cdot \underline{b}^\circ \subseteq \underline{c} \cdot \underline{d}^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \quad (\text{F1})$$

onde  $\underline{k}$  designa a função (constante) que dá sempre  $k$  como resultado. **Sugestão:** evite quantificadores desnecessários.

---

**RESOLUÇÃO: Tem-se:**

$$\begin{aligned} & \underline{a} \cdot \underline{b}^\circ \subseteq \underline{c} \cdot \underline{d}^\circ \\ & \{ \dots \} \\ & id \subseteq \underline{a}^\circ \cdot \underline{c} \cdot \underline{d}^\circ \cdot \underline{b} \\ & \{ \dots \} \\ & \langle \forall x :: \langle \exists y : x (\underline{a}^\circ \cdot \underline{c}) y : y (\underline{d}^\circ \cdot \underline{b}) x \rangle \rangle \\ & \{ \dots \} \\ & \langle \forall x :: \langle \exists y : a = c : d = b \rangle \rangle \\ & \{ \dots \} \\ & a = c \wedge d = b \end{aligned}$$

□

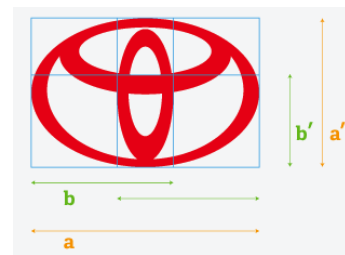
---

**Questão 2** A relação dourada ("golden ratio")  $\mathbb{R} \xleftarrow{G} \mathbb{R}$  definida por

$$b \ G \ a \Leftrightarrow a^2 = a \ b + b^2 \quad (F2)$$

é amplamente usada nas artes gráficas para obter resultados bem proporcionados, como se pode ver na figura ao lado, que “explica” a arquitectura do símbolo da marca Toyota.

Mostre que  $G$  é invariante em relação a qualquer operação de *scaling*, isto é, que se tem o “quadrado mágico”



$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xleftarrow{G} & \mathbb{R} \\ (k \times) \downarrow & \subseteq & \downarrow (k \times) \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{G} & \mathbb{R} \end{array} \quad . \quad (F3)$$

onde  $k \neq 0$  pertence a  $\mathbb{R}$ .

**RESOLUÇÃO:** Como a definição de  $G$  é *pointwise*, há que exprimir o quadrado mágico a esse nível, cf:

$$\begin{aligned} & (k \times) \cdot G \subseteq G \cdot (k \times) \\ \equiv & \{ \dots \} \\ & G \subseteq (k \times)^\circ \cdot G \cdot (k \times) \\ \equiv & \{ \dots \} \\ & a \ G \ b \Rightarrow (k \ a) \ G \ (k \ b) \end{aligned}$$

Vamos então mostrar que  $a \ G \ b$  é suficiente para  $(k \ a) \ G \ (k \ b)$  se verificar:

$$\begin{aligned} & (k \ a) \ G \ (k \ b) \\ \equiv & \{ \dots \} \\ & (k \ a)^2 = (k \ a) \ (k \ b) + (k \ b)^2 \\ \equiv & \{ \dots \} \\ & k^2 \ a^2 = k^2 \ a \ b + k^2 \ b^2 \\ \equiv & \{ k^2 > 0 \} \\ & a^2 = a \ b + b^2 \\ \equiv & \{ \dots \} \\ & a \ G \ b \end{aligned}$$

(Mais do que queríamos: o quadrado mágico é perfeito.)  $\square$

**Questão 3** Uma propriedade importante das relações difuncionais é que são sempre factorizáveis numa composição da forma  $R^\circ \cdot S$ , em que  $R$  e  $S$  são relações simples. Mostre que:

$$R^\circ \cdot S \text{ é difuncional} \Leftrightarrow \begin{cases} R \text{ é simples} \\ S \text{ é simples} \end{cases} \quad (F4)$$

**RESOLUÇÃO:** Tems-se:

```

R° · S é difuncional
≡ { ..... }
R° · S · S° · R · R° · S ⊆ R° · S
⇐ { ..... }
R° · R · R° · S ⊆ R° · S
⇐ { ..... }
R° · S ⊆ R° · S
≡ { ..... }
TRUE

```



**Questão 4** Foi feito ao chatGPT o seguinte pedido:

Can you please write an Alloy model for the following requirements:

(a) A hardware equipment is made of some finite number of either components or sub-equipments  
 (b) Sub-equipments are also made of some finite number of either components or sub-equipments, and so on. (c) No equipment is a sub-equipment of itself, even if indirectly.

A resposta foi o seguinte modelo em Alloy, que não revelou qualquer erro sintático:

```

abstract sig Hardware {}
sig Component extends Hardware {}
sig Equipment extends Hardware {
  parts : set Hardware
}
// Prevent cycles : no equipment is (even indirectly) a part of itself.
pred noCycles {
  all e : Equipment | e  $\neg$  in e.^ parts
}
fact {
  noCycles
}

```

Analizando o modelo Alloy proposto, desenhe o diagrama relacional correspondente e avalie a sua qualidade. O que teria feito diferente? Justifique a sua resposta.

**RESOLUÇÃO:** Tem-se, pela keyword extends,

$$Component \xrightarrow{i_1} Hardware \xleftarrow{i_2} Equipment$$

e ainda:

$$\text{Component} \xrightarrow{i_1} \text{Hardware} \xleftarrow{i_2} \text{Equipment}$$

$\xleftarrow{\text{Parts}}$

Mas como

$$\text{Hardware} = \text{Component} + \text{Equipment}$$

então tem-se, simplesmente:

$$\text{Equipment} \xrightarrow{\text{Parts}} \text{Component} + \text{Equipment}$$

Observações:

- Falta forçar que esta relação seja simples, pois a decomposição em sub-equipamentos deverá ser única.
- *Parts* deverá também ser inteira, pois não faz sentido falar de um equipamento que não se sabe de que é feito.

Logo *Parts* deverá ser uma função, chamemos-lhe *parts*.

- Falta também registar as quantidades, pois não se consegue dizer — por exemplo — que uma roda é parte de um carro 4 vezes. (= Um carro tem exactamente 4 rodas).

Em suma, deveríamos ter:

$$\text{parts} : \text{Equipment} \rightarrow \mathbb{N}_0 \times (\text{Component} + \text{Equipment})$$

□

---

### Questão 5 A declaração

**data** *Maybe* *a* = *Nothing* | *Just a*

em Haskell corresponde, como se sabe, à declaração do isomorfismo:

$$\begin{aligned} \text{in} &: 1 + A \rightarrow \text{Maybe } A \\ \text{in} &= [\text{Nothing}, \text{Just}] \end{aligned}$$

Verifique, por cálculo relacional, se

$$\begin{aligned} \text{maybeToList} &:: \text{Maybe } a \rightarrow [a] \\ \text{maybeToList} &= [\text{nil}, \text{singl}] \cdot \text{in}^\circ \end{aligned}$$

— onde  $\text{nil } \_ = []$  e  $\text{singl } a = [a]$  — é injectiva. **NB:** Pode assumir a injectividade de *singl*.

---

RESOLUÇÃO: *maybeToList* injectiva é a mesma coisa que  $[\text{nil}, \text{singl}]$  injectiva, pois *in* é uma bijecção. Então:

$$\begin{aligned} &[\text{nil}, \text{singl}] \text{ injectiva} \\ \equiv &\{ \dots\dots\dots \} \\ &i_1 \cdot \text{nil}^\circ \cup i_2 \cdot \text{singl}^\circ \text{ simples} \\ \equiv &\{ \text{union simplicity} \} \\ &\left\{ \begin{array}{l} i_1 \cdot \text{nil}^\circ \text{ simples} \\ i_2 \cdot \text{singl}^\circ \text{ simples} \\ i_1 \cdot \text{nil}^\circ \cdot \text{singl} \cdot i_2^\circ \subseteq \text{id} \end{array} \right. \\ \equiv &\{ A \xleftarrow{k} 1 \text{ injectiva; singl assumida injectiva ; shunting ; disjointness} \} \\ &\text{nil}^\circ \cdot \text{singl} \subseteq \perp \\ \equiv &\{ \text{guardanapo etc, listas} \} \\ &[] \neq [a] \\ \equiv &\{ \text{trivial} \} \\ &\text{true} \end{aligned}$$

□

**Questão 6** Numa enciclopédia *on-line* sobre geografia foi necessário registar países, cidades e as capitais dos primeiros usando as relações

$$CityDetails \xleftarrow{Cities} City \xleftarrow{capital} CountryDetails \xleftarrow{Countries} Country$$

sujeitas ao invariante  $inv (Countries, Cities)$  captado pelo seguinte quadrado mágico:

$$\begin{array}{ccc} CountryDetails & \xleftarrow{Countries} & Country \\ \downarrow capital & \subseteq & \downarrow \top \\ City & \xleftarrow{Cities^\circ} & CityDetails \end{array} \quad (F5)$$

Considere-se a operação que acrescenta o país  $c$  e a sua descrição  $d$  à relação  $Countries$ :

$$newCountry (c, d) (Countries, Cities) = (Countries \cup \underline{d} \cdot \underline{c}^\circ, Cities) \quad (F6)$$

Complete o cálculo que se segue da pré-condição mais fraca (WP) que garante que  $newCountry$  preserva o invariante (F5), e explique o seu significado por palavras suas.

$$\begin{aligned} & inv (newCountry (c, d) (Countries, Cities)) \\ \equiv & \{ \dots \} \\ & \vdots \\ \equiv & \{ \dots \} \\ & inv (Countries, Cities) \wedge \underbrace{\langle \exists e :: e \text{ Cities } (capital \ d) \rangle}_{WP} \end{aligned}$$

**RESOLUÇÃO: Tem-se:**

$$\begin{aligned} & inv (newCountry (c, d) (Countries, Cities)) \\ \equiv & \{ (F6) \} \\ & inv (Countries \cup \underline{d} \cdot \underline{c}^\circ, Cities) \\ \equiv & \{ (F5) \} \\ & capital \cdot (Countries \cup \underline{d} \cdot \underline{c}^\circ) \subseteq Cities^\circ \cdot \top \\ \equiv & \{ \text{linearidade; universal-}\cup; (F5) \} \\ & inv (Countries, Cities) \wedge capital \cdot \underline{d} \cdot \underline{c}^\circ \subseteq Cities^\circ \cdot \top \\ \equiv & \{ f \cdot \underline{k} = \underline{f} k; \text{shunting}; \top \cdot f = \top \} \\ & inv (Countries, Cities) \wedge id \subseteq (\underline{capital \ d})^\circ \cdot Cities^\circ \cdot \top \\ \equiv & \{ \text{conversos} \} \\ & inv (Countries, Cities) \wedge id \subseteq \top \cdot Cities \cdot \underline{capital \ d} \\ \equiv & \{ \text{composição; guardanapo} \} \\ & inv (Countries, Cities) \wedge \underbrace{\langle \exists e :: e \text{ Cities } (capital \ d) \rangle}_{WP} \end{aligned}$$

WP = a capital de um novo país tem de ser uma cidade conhecida.  $\square$

**Questão 7** A propriedade universal de  $\langle R, S \rangle$  garante-nos, por cancelamento,  $\pi_1 \cdot \langle R, S \rangle \subseteq R$  e  $\pi_2 \cdot \langle R, S \rangle \subseteq S$ . Mas podemos ser mais precisos:

$$\pi_1 \cdot \langle R, S \rangle = R \cdot \delta S \quad (\text{F7})$$

$$\pi_2 \cdot \langle R, S \rangle = S \cdot \delta R \quad (\text{F8})$$

Sabendo que

$$\pi_2 \cdot \pi_1^\circ = \top \quad (\text{F9})$$

se verifica, apresente justificações para os passos do seguinte cálculo de (F8):<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 & \pi_2 \cdot \langle R, S \rangle = S \cdot \delta R \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \pi_2 \cdot \langle R, S \rangle = \top \cdot \delta R \cap S \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \pi_2 \cdot (\pi_1^\circ \cdot R \cap \pi_2^\circ \cdot S) = \top \cdot R \cap S \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \pi_2 \cdot (\pi_1^\circ \cdot R \cap \pi_2^\circ \cdot S) = \pi_2 \cdot \pi_1^\circ \cdot R \cap \pi_2 \cdot \pi_2^\circ \cdot S \\
 \Leftarrow & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \pi_2^\circ \cdot \pi_2 \cdot (\pi_2^\circ \cdot S) \subseteq \pi_2^\circ \cdot S \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \pi_2^\circ \cdot S \subseteq \pi_2^\circ \cdot S \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \text{TRUE}
 \end{aligned}$$

**RESOLUÇÃO:** Tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \pi_2 \cdot \langle R, S \rangle = S \cdot \delta R \\
 \equiv & \quad \{ \text{pré-restriction (5.210)} \ R \cdot \Phi_p = \top \cdot \Phi_p \cap R \} \\
 & \pi_2 \cdot \langle R, S \rangle = \top \cdot \delta R \cap S \\
 \equiv & \quad \{ \text{definição (5.102)} \ \langle R, S \rangle = \pi_1^\circ \cdot R \cap \pi_2^\circ \cdot S ; \text{topo: } \top \cdot \delta R = \top \cdot R \} \\
 & \pi_2 \cdot (\pi_1^\circ \cdot R \cap \pi_2^\circ \cdot S) = \top \cdot R \cap S \\
 \equiv & \quad \{ (\text{F9}) ; \pi_2 \text{ é uma sobrejecção} \} \\
 & \pi_2 \cdot (\pi_1^\circ \cdot R \cap \pi_2^\circ \cdot S) = \pi_2 \cdot \pi_1^\circ \cdot R \cap \pi_2 \cdot \pi_2^\circ \cdot S \\
 \Leftarrow & \quad \{ \text{distributividade condicional (5.67)} \} \\
 & \pi_2^\circ \cdot \pi_2 \cdot (\pi_2^\circ \cdot S) \subseteq \pi_2^\circ \cdot S \\
 \equiv & \quad \{ \pi_2 \text{ é difuncional (conversos)} \} \\
 & \pi_2^\circ \cdot S \subseteq \pi_2^\circ \cdot S \\
 \equiv & \quad \{ \text{reflexividade} \} \\
 & \text{TRUE}
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>O cálculo de (F7) — não pedido — é em tudo semelhante.

□

---

**Questão 8** Use igualdade indirecta para demonstrar a seguinte propriedade da divisão relacional que aparece no formulário:

$$R / (S \cup P) = R / S \cap R / P \quad (\text{F10})$$

---

**RESOLUÇÃO:** Tem-se (justificar):

$$\begin{aligned}
 & R / (S \cup P) = R / S \cap R / P \\
 :: & \quad \{ \text{igualdade indirecta} \} \\
 & X \subseteq R / (S \cup P) \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & X \cdot (S \cup P) \subseteq R \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & X \cdot S \cup X \cdot P \subseteq R \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \begin{cases} X \cdot S \subseteq R \\ X \cdot P \subseteq R \end{cases} \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \begin{cases} X \subseteq R / S \\ X \subseteq R / P \end{cases} \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & X \subseteq R / S \cap R / P
 \end{aligned}$$

□