Cálculo de Sistemas de Informação
Perfil: MÉTODOS FORMAIS DE PROGRAMAÇÃO

1.º Ano de MEI e MMC, Universidade do Minho
Ano Lectivo de 2023/24

1º Teste — 18 de Abril de 2024, 16h00–18h00
Sala E1-1.05

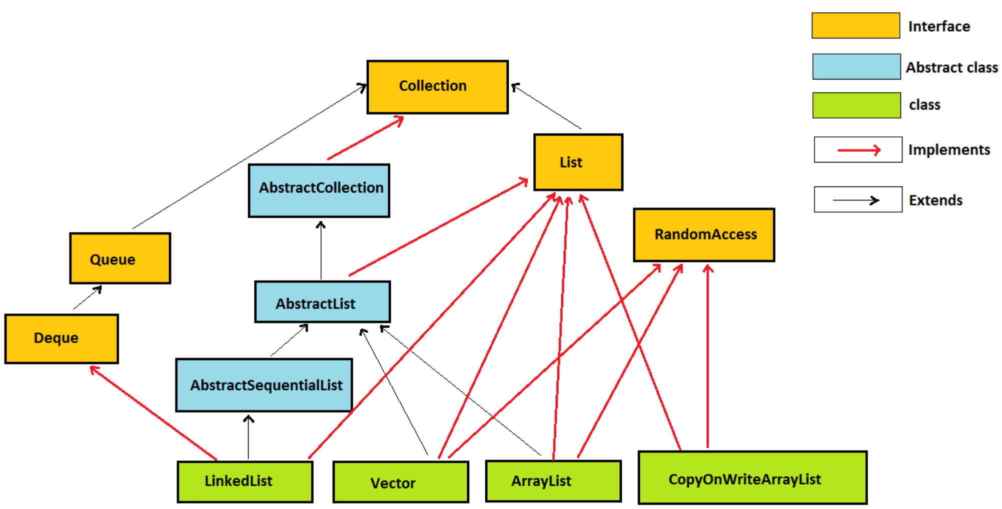
---

*Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo **médio** estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*

Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.

PROVA COM CONSULTA (2 horas)

Questão 1 A imagem que se segue,



foi retirada do *site* JAVA MADE EASY (`https://www.javamadesoeasy.com`). Pela figura, vê-se que o tipo da relação $Implements$ (setas a vermelho) é:

$$Implements : Abstract\_Class + Class \rightarrow Interface \tag{F1}$$

Por exemplo, a figura diz-nos que

- $List \ Implements \ (i_1 \ Abstract\_List)$
- $Deque \ Implements \ (i_2 \ LinkedList)$

etc, etc.

- Investigue $Implements$ quanto a ser injectiva e simples.
- Qual é o tipo da relação $Extends$ (setas a cinzento)?
- Concorda com as relações tal como estão apresentadas na figura? (Justifique informalmente.)

Questão 2 Demonstre que a igualdade

$$f \cdot f^\circ \cdot f = f \tag{F2}$$

se verifica, qualquer que seja a função f. **Sugestão**: use "ping-pong".

Questão 3 Suponha que tem um programa funcional f que "encaixa" no seguinte "quadrado mágico",

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & A \arrow[l, "\Phi_p"'] \arrow[d, "f"] \\ B & B \arrow[l, "\Phi_q"] \end{tikzcd} \tag{F3}$$

onde

$$\Phi_p = id \cap \frac{p}{true} \tag{F4}$$

para $true\ \_ = \textsc{True}$. Calcule o significado lógico de (F3) e descreva-o por palavras suas.

Questão 4 Suponha que, numa dada competição desportiva ($Competition$), existe a seguinte regra:

> *Um treinador ($Coach$) de uma dada equipa ($Team$) só o pode ser se tiver sido jogador dessa ou outra qualquer equipa participante ($Involved$) nessa competição.* (F5)

$$\begin{tikzcd} & Coach & \\ Team \arrow[ur, "the\_coach\_of"] & & Team \arrow[ul, "Player\_of"'] \\ & Competition \arrow[ul, "Involved"] \arrow[ur, "Involved"'] & \end{tikzcd}$$

1. A única função do diagrama é the_coach_of. Por que é que não faz sentido as outras relações serem funções?
2. Indique, justificando, quais das seguintes expressões relacionais formalizam adequadamente o requisito (F5):

$$the\_coach\_of \cdot Involved \ \subseteq \ Player\_of \cdot Involved \tag{F6}$$

$$the\_coach\_of^\circ \cdot Player\_of \ \subseteq \ Involved \cdot Involved^\circ \tag{F7}$$

qualquer uma das anteriores. (F8)

nenhuma das anteriores. (F9)

Questão 5 Recorde a seguinte regra da composição horizontal de quadrados "mágicos":

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & C \arrow[l, "R"'] \arrow[d, "Q"] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & C' \arrow[l, "R'"'] \arrow[d, "Q'"] \\ B & D \arrow[l, "S"] & D' \arrow[l, "S'"] \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & C \arrow[l, "R \cdot R'"'] \arrow[d, "Q'"] \\ B' & D' \arrow[l, "S \cdot S'"] \end{tikzcd} \tag{F10}$$

Complete a seguinte demonstração de (F10):

$$
\begin{array}{ll}
 & P \cdot R \cdot R' \subseteq S \cdot S' \cdot Q' \\
\Leftarrow & \quad \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
 & S \cdot Q \cdot R' \subseteq S \cdot S' \cdot Q' \\
\dots & \quad \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
 & \vdots \\
\dots & \quad \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
 & \textsc{True}
\end{array}
$$

Questão 6 Demonstre a seguinte regra (muito prática!),

*Uma função f é uma **bijecção** se e só se o seu converso f° for também uma função.*

completando:

$$
\begin{array}{ll}
 & f \text{ é uma bijecção} \\
\equiv & \quad \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
 & \vdots \\
\equiv & \quad \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
 & f \text{ e } f^\circ \text{ são funções}
\end{array}
$$

Questão 7 Apresente justificações para o seguinte cálculo de

$$\mathsf{coassocr} : (A + B) + C \to A + (B + C)$$

como converso de $\mathsf{coassocl} = [i_1 \cdot i_1 \, , i_2 + id]$, ficando implicitamente provado que essas duas funções são bijectivas (isomorfismos):

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathsf{coassocl}^\circ \\
= & \quad \{ \ \text{definição } \mathsf{coassocl} = [i_1 \cdot i_1 \, , i_2 + id] \ \} \\
 & [i_1 \cdot i_1 \, , i_2 + id]^\circ \\
= & \quad \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
 & i_1 \cdot (i_1 \cdot i_1)^\circ \cup i_2 \cdot (i_2^\circ + id) \\
= & \quad \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
 & i_1 \cdot (i_1 \cdot i_1)^\circ \cup [i_2 \cdot i_1 \cdot i_2^\circ \, , i_2 \cdot i_2] \\
= & \quad \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
 & i_1 \cdot i_1^\circ \cdot i_1^\circ \cup i_2 \cdot i_1 \cdot i_2^\circ \cdot i_1^\circ \cup i_2 \cdot i_2 \cdot i_2^\circ \\
= & \quad \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
 & [(i_1 \cdot i_1^\circ \cup i_2 \cdot i_1 \cdot i_2^\circ) \, , i_2 \cdot i_2] \\
= & \quad \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
 & [[i_1 \, , i_2 \cdot i_1] \, , i_2 \cdot i_2]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
= & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
 & [id + i_1\,, i_2 \cdot i_2] \\
= & \quad \{ \text{ chamar coassocr à função obtida } \} \\
 & \mathsf{coassocr}
\end{array}
$$

Questão 8 Recorde a propriedade universal da divisão relacional à direita:

$$Z \cdot Y \subseteq X \;\equiv\; Z \subseteq X/Y \tag{F11}$$

A propriedade

$$(R \,/\, S) \,/\, Q = (R \,/\, Q) \,/\, S$$

não é verdadeira em geral, mas sê-lo-á se

$$Q \cdot S = S \cdot Q \tag{F12}$$

se verificar. (Diz-se neste caso que as relações Q e S são *permutativas* entre si.)

Assumindo (F12), complete a dedução por igualdade indirecta que a seguir se faz:

$$
\begin{array}{ll}
 & X \;\subseteq\; (R \,/\, S) \,/\, Q \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
 & X \cdot Q \;\subseteq\; (R \,/\, S) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
 & \vdots \\
:: & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
 & (R \,/\, S) \,/\, Q = (R \,/\, Q) \,/\, S
\end{array}
$$
