Cálculo de Sistemas de Informação
Perfil: MÉTODOS FORMAIS DE PROGRAMAÇÃO

1.º Ano de MEI e MMC, Universidade do Minho
Ano Lectivo de 2022/23

Exame de época especial — 21 de Julho de 2023, 14h30–16h30
Sala E1-2.27

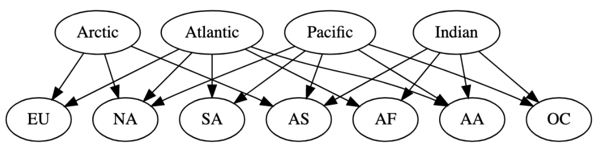
---

*Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo **médio** estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*

Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.

PROVA COM CONSULTA (2 horas)

Questão 1 Considere a relação $R : Continent \leftarrow Ocean$ que se segue



em que $y\ R\ x$ quer dizer: "O continente y é banhado pelo oceano x" e onde as siglas abreviam continentes (e.g. NA = North America, AF = Africa, etc.)

Classifique a relação R quanto a ser: (a) inteira; (b) reflexiva; (c) sobrejectiva; (d) simples; (e) injectiva. Justifique a sua resposta.

Questão 2 O actual site do DI[1] é um WordPress alimentado por um *agregador* de dados extraídos de folhas de cálculo que são exportadas pelos sistemas de informação da U.Minho e do departamento. Esse *agregador*, escrito em Haskell, segue o modelo *Key/Value-pair*, isto é, é baseado em relações binárias chave-valor obrigadas a serem *simples*.

Uma dessas relações trata de associar chaves a endereços WWW

$$Href = [I\,, P] \cdot [inst\,, pers]^{\circ} \tag{F1}$$

que podem ser de dois tipos, institucionais ($inst$) ou pessoais ($pers$), de forma disjunta: isto é, $\frac{inst}{pers} = \bot$ verifica-se.

Mostre que, se as relações parcelares Ie P forem simples, $Href$ também o é.

Questão 3 Uma técnica de prova clássica em Lógica é a chamada *redução ao absurdo* que, expressa relacionalmente, é a equivalência:

$$X \subseteq Y \quad \equiv \quad X - Y \subseteq \bot \tag{F2}$$

(a) Justifique (F2) usando álgebra relacional. (b) Exprima (F2) em notação *pointwise*.

[1] `web.di.uminho.pt/sitedi`.

Questão 4 Justifique os passos do cálculo seguinte da lei de absorção-$\times$ (relacional):

$$
\begin{array}{cl}
 & (R \times S) \cdot \langle P, Q \rangle \\
= & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & (R^\circ \times S^\circ)^\circ \cdot \langle P, Q \rangle \\
= & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \langle R^\circ \cdot \pi_1, S^\circ \cdot \pi_2 \rangle^\circ \cdot \langle P, Q \rangle \\
= & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & (R^\circ \cdot \pi_1)^\circ \cdot P \cap (S^\circ \cdot \pi_2)^\circ \cdot Q \\
= & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \pi_1^\circ \cdot R \cdot P \cap \pi_2^\circ \cdot S \cdot Q \\
= & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \langle R \cdot P, S \cdot Q \rangle \\
\Box &
\end{array}
$$

Questão 5 Tendo-se pedido ao chatGPT um modelo em Alloy, o mais simples possível, da rede social Instagram, foi gerado o seguinte:

```
sig User { }
sig Post {
   owner : User,
   likes : set User
}
sig Comment {
   author : User,
   post · :Post
}
fact {
   all p : Post | p · owner in User
   all l : User | l in Post.likes
   all c : Comment | c · author in User ∧ c · post · in Post
   no disj u1, u2 : User | u1 ≠ u2
}
pred showLikes [p : Post] {
   p · likes ≠ none
}
pred showComments [p : Post] {
   some c : Comment | c · post · = p
}
```

Analisando o modelo Alloy proposto, faça o diagram relacional correspondente e avalie a sua qualidade. Justifique a sua resposta.

Questão 6 Para uma dada classe de funções f e g, a lei distributiva

$$f \cdot (R - S) \cdot g^\circ = (f \cdot R \cdot g^\circ) - (f \cdot S \cdot g^\circ)$$

verifica-se. Identifique essa classe ao justificar o seguinte processo de cálculo por igualdade indirecta:

$$\begin{array}{ll}
 & f \cdot (R - S) \cdot g^\circ \ \subseteq \ X \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & R - S \ \subseteq \ f^\circ \cdot X \cdot g \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & R \ \subseteq \ f^\circ \cdot X \cdot g \cup S \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & R \ \subseteq \ f^\circ \cdot X \cdot g \cup (f^\circ \cdot f) \cdot S \cdot (g^\circ \cdot g) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & R \ \subseteq \ f^\circ \cdot (X \cup f \cdot S \cdot g^\circ) \cdot g \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & f \cdot R \cdot g^\circ - f \cdot S \cdot g^\circ \ \subseteq \ X
\end{array}$$

Questão 7 Os teoremas grátis de funções paramétricas sobre listas acabam sempre por precisar do *relator* R^*. Pode mostrar-se que este *relator* é caracterizado por duas propriedades, a saber

$$R^* \cdot \mathsf{nil} = \mathsf{nil} \tag{F3}$$

$$R^* \cdot \mathsf{cons} = \mathsf{cons} \cdot (R \times R^*) \tag{F4}$$

onde $\mathsf{nil}\ \_ = [\,]$ e $\mathsf{cons}\ (h, t) = h : t$ são funções sobre listas bem conhecidas. Verifique quais das seguintes afirmações são verdadeiras, justificando formalmente:

$$(\Phi_{false})^* = \bot \ \textbf{where}\ \mathit{false}\ x = \textsc{False} \tag{F5}$$

$$y\ (\Phi_p{}^*)\ (h : t) \ \Leftrightarrow\ p\ h \wedge \langle \exists\, t' \ :\ t\ \Phi_p{}^*\ t' :\ y = (h : t') \rangle \tag{F6}$$

Questão 8 Num sistema de ficheiros (FS) cada ficheiro ($File$) é acedido por uma única $Path$. Atente no "quadrado mágico" que se segue,

$$\begin{tikzcd}
File \arrow[d, "\underline{Dir}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\subseteq"] & Path \arrow[ll, "FS"'] \arrow[d, "parent"] \\
Type & File \arrow[l, "type"] & Path \arrow[l, "FS"]
\end{tikzcd}
\qquad
inv\ FS \ \Leftrightarrow\ \underline{Dir} \cdot FS \ \subseteq\ type \cdot FS \cdot parent \tag{F7}$$

que pretende registar o invariante seguinte:

Todo o ficheiro pertence a uma directoria, que é um ficheiro especial de tipo Dir.

É fácil de ver que o sistema de ficheiros vazio, $FS = \bot$, satisfaz (F7). Mas, e o que dizer de um sistema apenas com um ficheiro, e.g. $FS = \underline{k} \cdot \underline{p}^\circ$, onde k é o descritor do ficheiro e p a sua path?

Avalie $inv\ (\underline{k} \cdot \underline{p}^\circ)$ e tire conclusões.
