

Cálculo de Sistemas de Informação
 Perfil: MÉTODOS FORMAIS DE PROGRAMAÇÃO

1.º Ano de MEI e MMC, Universidade do Minho
 Ano Lectivo de 2022/23

2º Teste — 01 de Junho 2023
 14h00–16h00, Sala E1-0.22

*Esta prova consta de 8 questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo **médio** estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*

Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.

PROVA COM CONSULTA (2 horas)

Questão 1 Recorde o requisito

I would like to have an Alloy model for this simple problem: (a) a bicycle always has two wheels, the front and the rear wheel; (b) these wheels can never be the same; (c) no two bicycles have a wheel in common.

que foi assunto de uma questão no primeiro teste. Verifica-se que basta $[frontWheel, rearWheel]$ ser injectiva para captar as três cláusulas, cf.

$$Bicycle \xrightarrow{rearWheel} Wheel \xleftarrow{frontWheel} Bicycle$$

O Alloy que o chatGPT gerou inclui (em notação *pointwise*) as cláusulas

$$frontWheel \cap rearWheel = \perp \tag{F1}$$

$$\frac{rearWheel}{frontWheel} = \perp \tag{F2}$$

mas (F1) é redundante em face de (F2), como mostra o facto *genérico* seguinte:

$$f \cap g = \perp \iff \frac{g}{f} = \perp \tag{F3}$$

Sabendo que a lei seguinte se verifica,

$$S \cdot R \cap Q = S \cdot (R \cap S^\circ \cdot Q) \iff S \text{ is simple} \tag{F4}$$

complete a seguinte dedução de (F3):

$$\begin{aligned} & f \cap g = \perp \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & \dots \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & id \cap \frac{g}{f} \subseteq \perp \\ \Leftarrow & \{ \dots\dots\dots \} \\ & \frac{g}{f} = \perp \end{aligned}$$

RESOLUÇÃO: tem-se:

$$\begin{aligned}
 & f \cap g = \perp \\
 \equiv & \quad \{ \text{Fazendo } S, R, Q := f, id, g \text{ em (F4) uma vez que } f \text{ é simples} \} \\
 & f \cdot (id \cap f^\circ \cdot g) = \perp \\
 \equiv & \quad \{ X = \perp \Leftrightarrow X \subseteq \perp; \text{shunting de } f; X \cdot \perp = \perp \} \\
 & id \cap \frac{g}{f} \subseteq \perp \\
 \Leftarrow & \quad \{ \text{"subida do lado inferior"} \} \\
 & \frac{g}{f} = \perp
 \end{aligned}$$

□

Questão 2 Sempre que escrevemos $a \neq b$ estamos a usar a relação binária

$$A \xleftarrow{(\neq)} A = id \Rightarrow \perp \tag{F5}$$

que está sempre bem definida uma vez que todo o tipo A está equipado com a relação identidade $A \xleftarrow{id} A$. Mostre, usando cálculo relacional, que a relação (\neq) é simétrica e irreflexiva.

RESOLUÇÃO: Simétrica (acrescentar justificações):

$$\begin{aligned}
 & (id \Rightarrow \perp)^\circ \subseteq (id \Rightarrow \perp) \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & (id \Rightarrow \perp)^\circ \cap id \subseteq \perp \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & (id \Rightarrow \perp) \cap id \subseteq \perp \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & id \Rightarrow \perp \subseteq id \Rightarrow \perp
 \end{aligned}$$

□

Irreflexiva:

$$\begin{aligned}
 & (\neq) \text{ irreflexiva} \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & (\neq) \cap id \subseteq \perp \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & (\neq) \subseteq id \Rightarrow \perp \\
 \equiv & \quad \{ \text{pois } (\neq) = id \Rightarrow \perp \} \\
 & \text{true}
 \end{aligned}$$

□

Questão 3 Recorde que f se diz “ponto-a-ponto” menor que g , escrevendo-se $f \dot{\leq} g$, se se verificar

$$\langle \forall a :: f a \leq g a \rangle$$

isto é

$$f \subseteq (\leq) \cdot g \tag{F6}$$

Prove a equivalência:

$$f \dot{\leq} g \Leftrightarrow g \dot{\geq} f \tag{F7}$$

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$\begin{aligned} & f \dot{\leq} g \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & f \subseteq (\leq) \cdot g \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & g^\circ \subseteq f^\circ \cdot (\leq) \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & g \subseteq (\geq) \cdot f \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & g \dot{\geq} f \end{aligned}$$

□

Questão 4 Recorde a especificação da função `take` (Haskell) que foi abordada nas aulas,

$$\underbrace{\text{length } ys \leq n \wedge ys \sqsubseteq xs}_{\text{easy}} \Leftrightarrow \underbrace{ys \sqsubseteq \text{take } n \text{ } xs}_{\text{hard}} \tag{F8}$$

onde $x \sqsubseteq y$ é a relação x é prefixo de y . Mostre que (F8) se pode escrever sob a forma da seguinte igualdade de relações, em notação *pointfree*,

$$\langle \text{length}, id \rangle^\circ \cdot ((\leq) \times (\sqsubseteq)) = (\sqsubseteq) \cdot \widehat{\text{take}} \tag{F9}$$

onde, como sabe, $\widehat{f}(a, b) = f a b$. (**Sugestão:** introduza variáveis e simplifique.)

RESOLUÇÃO: Tem-se (adicionar justificações):

$$\begin{aligned} & \langle \text{length}, id \rangle^\circ \cdot ((\leq) \times (\sqsubseteq)) = (\sqsubseteq) \cdot \widehat{\text{take}} \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & ys (\langle \text{length}, id \rangle^\circ \cdot ((\leq) \times (\sqsubseteq))) (n, xs) \Leftrightarrow ys ((\sqsubseteq) \cdot \widehat{\text{take}}) (n, xs) \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & (\text{length } ys, ys) ((\leq) \times (\sqsubseteq)) (n, xs) \Leftrightarrow ys \sqsubseteq \widehat{\text{take}} (n, xs) \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \text{length } ys \leq n \\ ys \sqsubseteq xs \end{array} \right. \Leftrightarrow ys \sqsubseteq \text{take } n \text{ } xs \end{aligned}$$

□

Questão 5 Considere-se um sistema de informação bancário básico inicialmente modelado por uma relação *simplex* e *injectiva*

$$Nr \xrightarrow{S} Account$$

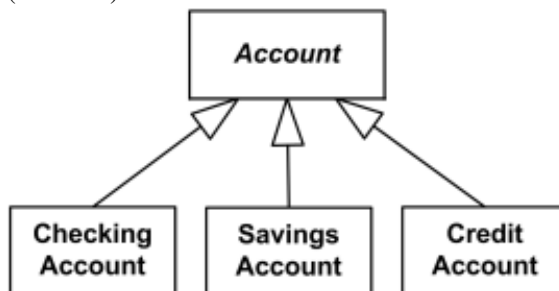
que associa a números de conta (*Nr*) a informação respectiva (*Account*).

Surgindo mais tarde a necessidade de especializar contas nas três sub-classes que se mostram na figura, definiu-se

$$S' = \langle S, R \rangle$$

que acrescenta a *S* uma relação *R* (também *simplex*) que categoriza contas:

$$Nr \xrightarrow{R} Checking + Savings + Credit$$



A pergunta é: será a nova versão *S'* do sistema uma relação *injectiva* quando *R* o não é? Justifique a sua resposta.

RESOLUÇÃO: Pela (5.236) é o facto é imediato, pois os "splits" aumentam sempre a *injectividade*. Por extenso:

$$\begin{aligned}
 & S' \text{ injectiva} \\
 \equiv & \{ S' = \langle S, R \rangle; (5.36) \} \\
 & \ker \langle S, R \rangle \subseteq id \\
 \equiv & \{ (5.111) \} \\
 & \ker S \cap \ker R \subseteq id \\
 \equiv & \{ S \text{ é injectiva (5.36)} \} \\
 & id \cap \ker R \subseteq id \\
 \equiv & \{ \text{cancelamento-}\cap \} \\
 & \text{TRUE}
 \end{aligned}$$

Logo *S'* é *injectiva* mesmo quando *R* o não é. □

Questão 6 Um modelo habitual para guardar informação é sob a forma de pares chave (*Key*) / valor (*Data*) — isto é, sob a forma de relações *simplex* $S : Key \rightarrow Data$. Em memórias de estado sólido, vulgarmente designadas por memórias *flash*, esse tipo de informação toma a forma

$$Addr \times Key \rightarrow Data + 1 \tag{F10}$$

onde *Addr* é o espaço de endereçamento disponível e *Data* + 1 regista informação activa ou apagada.

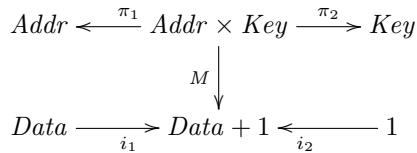
Evita-se apagar ou (re)escrever nas mesmas células pois isso acaba por danificá-las. Em vez disso, vão-se usando endereços seguintes livres para registar a informação actualizada.

No exemplo da figura ao lado, começou por guardar-se no endereço 1 informação associada a *KEY4*, que mais tarde se apagou (endereço 9). E a informação da chave *KEY1*, inicialmente guardada no endereço 3, foi alterada no endereço 7, por exemplo.

Para se extrair de uma memória flash $M : Addr \times Key \rightarrow Data + 1$ a relação $S : Key \rightarrow Data$ contendo a informação mais recente, alguém propôs

$$S = i_1^\circ \cdot M \cdot \pi_2^\circ \quad (F11)$$

que é um “caminho” do diagrama:



Concorda com a solução proposta? Justifique a sua resposta introduzindo variáveis e comentando o resultado.

RESOLUÇÃO: *Pointwise*, como sugerido:

$$\begin{aligned}
 & d S k \\
 \equiv & \quad \{ \text{justificar...} \} \\
 & (i_1 d) (M \cdot \pi_2^\circ) k \\
 \equiv & \quad \{ \text{justificar...} \} \\
 & \langle \exists a :: (i_1 d) M (a, k) \rangle
 \end{aligned}$$

Vê-se assim que S relaciona cada chave k com todos os valores d que tem (ou teve), correspondentes a endereços $a \in Addr$ que perde via π_2 . Ora, para se saber quais os ds mais recentes é preciso aceder aos endereços. Logo, S não tem informação suficiente para seleccionar o passado mais recente de cada chave (Key). \square

Questão 7 Recorde a projecção $snd : (a, b) \rightarrow b$ e, por *currying*, $\overline{snd} : t$ onde $t = a \rightarrow (b \rightarrow b)$. Mostre que o teorema grátis de \overline{snd} é

$$y R x \Rightarrow \overline{snd} y \cdot S \subseteq S \cdot \overline{snd} x \quad (F12)$$

(para todo o R, S, x e y devidamente tipados) e instancie-o por forma a obter o corolário:

$$\overline{snd} \cdot r = \overline{snd} \quad (F13)$$

Que conclui sobre \overline{snd} ?

RESOLUÇÃO: Tem-se (completar com justificações):

$$\begin{aligned}
 & \overline{snd} ((S \leftarrow S) \leftarrow R) \overline{snd} \\
 \equiv & \quad \{ \dots \} \\
 & \overline{snd} \cdot R \subseteq (S \leftarrow S) \cdot \overline{snd} \\
 \equiv & \quad \{ \dots \}
 \end{aligned}$$

1	KEY4	DATA
2	KEY2	DATA
3	KEY1	DATA
4	KEY1a	DATA
5	KEY3	DATA
6	KEY3	DATA
7	KEY1	DATA
8	KEY1b	DATA
9	KEY4	DEL

RESOLUÇÃO: Propõe-se:¹

$$\begin{aligned}
& \text{enoughSwitches} (\text{addNElem } X (S, R, P)) \\
\equiv & \quad \{ \text{(F15)} \} \\
& \text{enoughSwitches} (S, R \cup X, P) \\
\equiv & \quad \{ \text{(F14)} \} \\
& id \cap (R^\circ \cup X^\circ) \cdot (\neq) \cdot (R \cup X) \subseteq S^\circ \cdot S \\
\equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} id \cap R^\circ \cdot (\neq) \cdot R \subseteq S^\circ \cdot S \\ id \cap R^\circ \cdot (\neq) \cdot X \subseteq S^\circ \cdot S \\ id \cap X^\circ \cdot (\neq) \cdot R \subseteq S^\circ \cdot S \\ id \cap X^\circ \cdot (\neq) \cdot X \subseteq S^\circ \cdot S \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \text{enoughSwitches} (S, R, P) \\ id \cap R^\circ \cdot (\neq) \cdot X \subseteq S^\circ \cdot S \\ id \cap X^\circ \cdot (\neq) \cdot X \subseteq S^\circ \cdot S \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
& \text{enoughSwitches} (S, R, P) \wedge id \cap \underbrace{((R \cup X)^\circ \cdot (\neq) \cdot X)}_{\cdot} \subseteq S^\circ \cdot S \text{ (WP)}
\end{aligned}$$

□

¹ Acrescentar as justificações que faltam.