Cálculo de Sistemas de Informação
Perfil: MÉTODOS FORMAIS DE PROGRAMAÇÃO

1.º Ano de MEI e MMC, Universidade do Minho
Ano Lectivo de 2022/23

1º Teste — 04 de Maio 2023
17h00–19h00, Sala E7-1.10

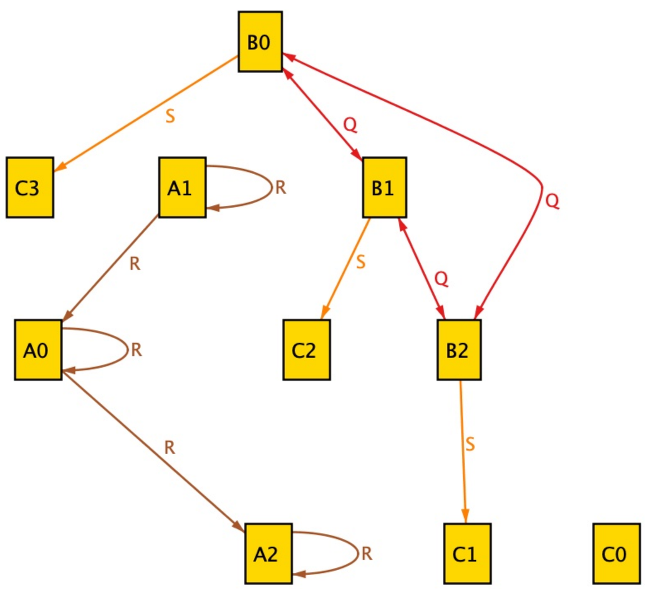
---

*Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo **médio** estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*

Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.

PROVA COM CONSULTA (2 horas)

Questão 1 Sejam dados os tipos de dados C (com quatro elementos) e A, B (ambos com três elementos) e as relações R, S e Q registadas no diagrama Alloy em baixo.



	R	S	Q
Simples			
Inteira			
Injectiva			
Sobrejectiva			
Reflexiva			
Simétrica			
Irreflexiva			

Coloque um ✓ no quadro acima (à direita) caso a correspondente relação satisfaça o critério referido. Justifique convenientemente a sua resposta.

RESOLUÇÃO: Quadro preenchido

	R	S	Q
Simples		✓	
Inteira	✓	✓	✓
Injectiva		✓	
Sobrejectiva	✓		✓
Reflexiva	✓		
Simétrica			✓
Irreflexiva			✓

com base na inspecção de (verificar em casa):

R	A_0	A_1	A_2
A_0	1	1	
A_1		1	
A_2	1		1

S	B_0	B_1	B_2
C_0			
C_1			1
C_2		1	
C_3	1		

Q	B_0	B_1	B_2
B_0		1	1
B_1	1		1
B_2	1	1	

NB: só Q poderia qualificar para os três últimos critérios, pois os tipos de saída e de entrada das outras relações não são os mesmos e, logo, compará-las com id "não tipa".

□

Questão 2 Demonstre a seguinte lei da divisão de funções:

$$\frac{h \cdot f}{h \cdot g} = \frac{f}{g} \quad \Leftarrow \quad h \text{ é injectiva}$$

RESOLUÇÃO:

$$\begin{array}{cl} & \dfrac{h \cdot f}{h \cdot g} = \dfrac{f}{g} \\ \equiv & \qquad \{ \text{ 5.54 } \} \\ & g^\circ \cdot \dfrac{h}{h} \cdot f = g^\circ \cdot f \\ \Leftarrow & \qquad \{ \text{ monotonia da composição relacional, duas vezes } \} \\ & \dfrac{h}{h} = id \end{array}$$

□

Questão 3 Perante este pedido,

> *I would like to have an Alloy model for this simple problem: (a) a bicycle always has two wheels, the front and the rear wheel; (b) these wheels can never be the same; (c) no two bicycles have a wheel in common.*

o serviço ChatGPT fez a seguinte proposta:

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{sig}\ \mathit{Bicycle}\ \{\\
\quad \mathit{frontWheel} : \mathsf{one}\ \mathit{Wheel},\\
\quad \mathit{rearWheel} : \mathsf{one}\ \mathit{Wheel}\\
\}\\
\mathsf{sig}\ \mathit{Wheel}\ \{\,\}\\
\mathsf{fact}\ \{\\
\quad \mathsf{all}\ b : \mathit{Bicycle}\ |\\
\quad\quad b \cdot \mathit{frontWheel} \neq b \cdot \mathit{rearWheel}\ //\ (b)\\
\}\\
\mathsf{fact}\ \{\\
\quad \mathsf{no}\ \ \mathsf{disj}\ b_1, b_2 : \mathit{Bicycle}\ |\\
\quad\quad b_1 \cdot \mathit{frontWheel} = b_2 \cdot \mathit{frontWheel}\ \mathsf{or}\\
\quad\quad b_1 \cdot \mathit{frontWheel} = b_2 \cdot \mathit{rearWheel}\ \mathsf{or}\\
\quad\quad b_1 \cdot \mathit{rearWheel} = b_2 \cdot \mathit{frontWheel}\ \mathsf{or}\\
\quad\quad b_1 \cdot \mathit{rearWheel} = b_2 \cdot \mathit{rearWheel}\ //\ (c)\\
\}\\
\mathsf{assert}\ \mathit{twoWheels}\ \{\\
\quad \mathsf{all}\ b : \mathit{Bicycle}\ |\ \#b \cdot \mathit{frontWheel} = 1\ \mathit{and}\ \#\ b \cdot \mathit{rearWheel} = 1\ //\ (a)\\
\}\\
\mathsf{run}\ \{\,\}\ \textbf{for}\ 5\ \mathit{Bicycle}, 5\ \mathit{Wheel}
\end{array}
$$

Comente a qualidade do modelo proposto e mostre que o mesmo pode ser expresso de forma bastante mais succinta com base em propriedades de

$$
\mathit{Bicycle} \xrightarrow{\mathit{rearWheel}} \mathit{Wheel} \xleftarrow{\mathit{frontWheel}} \mathit{Bicycle}
$$

RESOLUÇÃO: Formulação succinta:

$[\mathit{frontWheel}, \mathit{rearWheel}]$ deverá ser injectiva

significando, por (5.126), que

- $\mathit{frontWheel}$ e $\mathit{rearWheel}$ são injectivas (1ª e 4ª cláusula do 2º facto dado)
- $\mathit{frontWheel}^\circ \cdot \mathit{rearWheel} = \bot$ (2ª e 3ª cláusula do 2º facto dado)

Qualidade do modelo:

- O assert

  $$
  \begin{array}{l}
  \mathsf{assert}\ \mathit{twoWheels}\ \{\\
  \quad \mathsf{all}\ b : \mathit{Bicycle}\ |\ \#b \cdot \mathit{frontWheel} = 1\ \mathit{and}\ \#\ b \cdot \mathit{rearWheel} = 1\ //\ (a)
  \end{array}
  $$

  é rendundante pois $\mathit{frontWheel}$ e $\mathit{rearWheel}$ são funções (cf. cardinalidade one).

- O primeiro facto não faz falta, pois resulta de $\mathit{frontWheel}^\circ \cdot \mathit{rearWheel} = \bot$. De facto,

  $$b_1\ (\mathit{frontWheel}^\circ \cdot \mathit{rearWheel})\ b_2 \ \Leftrightarrow\ \mathit{frontWheel}\ b_1 = \mathit{rearWheel}\ b_2$$

  e $\mathit{frontWheel}^\circ \cdot \mathit{rearWheel} = \bot$ significa:

  $$\langle \forall\ b_1, b_2\ ::\ \mathit{frontWheel}\ b_1 \neq \mathit{rearWheel}\ b_2 \rangle$$

  Para $b_1 := b_2$ tem-se o primeiro facto que o chatGPT assinala.

$\square$

Questão 4 Recorde a questão Q1.7 das fichas práticas, onde uma linha de caminho de ferro é modelada por duas relações simples, $Signal \xleftarrow{S} \mathbb{N} \xrightarrow{J} Junction$, que indicam onde, a uma determinada distância da origem medida em metros, aparecem junções de via (J) ou sinais (S). O modelo está sujeito ao invariante

$$J \subseteq \top \cdot S \cdot (\leqslant) \tag{F1}$$

para garantir o requisito de segurança de haver sempre, antes de uma junção de via, um sinal que a avisa.

Pretende-se agora mais rigor nessa garantia:

Antes de uma junção de via há sempre um sinal que a avisa ***pelo menos 500 metros antes***.

Perante este novo requisito, alguém disse que era preciso incluir mais uma relação X em (F1),

$$J \subseteq \top \cdot S \cdot X \cdot (\leqslant)$$

mas houve opiniões diferentes sobre X:[1]

1. $X^\circ = (+500)$
2. $X = (+500)$

Qual sua opinião: opta por 1, por 2 ou por nenhuma das alternativas? Justifique.

RESOLUÇÃO: O facto (F1) traduz-se para a seguinte quantificação lógica:

$$\langle \forall\ n, j\ :\ j\ J\ n :\ \langle \exists\ s, m\ :\ s\ S\ m :\ m \leqslant n \rangle \rangle$$

Obviamemte, $m \leqslant n$ significa $0 \leqslant n - m$. O que queremos agora garantir é que não só $n - m$ é positiva mas também que é maior ou igual a 500:

$$\begin{array}{ll} & 500 \leqslant n - m \\ \equiv & \quad \{ \text{ arithmetics } \} \\ & m + 500 \leqslant n \\ \equiv & \quad \{ \text{ "guardanapo" } \} \\ & m\ (+(500)^\circ \cdot (\leqslant))\ n \end{array}$$

Logo $X = (+500)^\circ$, i.é $X^\circ = (+500)$. $\square$

Questão 5 Pretendendo-se especificar a operação de acesso aleatório a uma lista finita, escreveu-se a relação

$$\left\{ \begin{array}{l} G : A^* \to A \times A^* \\ G = \frac{bag}{bag \cdot \mathsf{cons}} \end{array} \right. \tag{F2}$$

onde $\mathsf{cons}\ (h, t) = h : t$ e $bag : A^* \to {\mathbb{N}_0}^A$ é a função dada nas aulas que indica quantas vezes cada elemento ocorre numa lista.[2] Desenvolva a versão *pointwise* de (F2),

$$(h, t)\ G\ x = \ldots h \ldots t \ldots x \ldots$$

[1] Tal como habitualmente, $f = (+k)$ designa $f\ x = x + k$, etc.

[2] Recorde a sua utilização na especificação de *sorting* dada nas aulas.

e ajuíze o seu valor lógico para $x = [\,]$.

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{array}{cl}
& G\ (h,t)\ G\ x \\
\equiv & \quad \{\ \text{(F2)}\ \} \\
& (h,t)\ \dfrac{bag}{bag \cdot \mathsf{cons}}\ x \\
\equiv & \quad \{\ \text{divisão } \frac{f}{g}, \text{"guardanapo" etc}\ \} \\
& (bag \cdot \mathsf{cons})\ (h,t) = bag\ x \\
\equiv & \quad \{\ \text{definição de } \mathsf{cons}\ \} \\
& bag\ (h:t) = bag\ x
\end{array}
$$

Caso $x = [\,]$:

Repare-se que $G = \mathsf{cons}^\circ \cdot \frac{bag}{bag}$, onde $\frac{bag}{bag}$ é a relação de *permutação* entre listas finitas. Para $x = [\,]$, tem-se $G\ (h,t)\ G\ [\,]\ \Leftrightarrow\ (h:t)\ \frac{bag}{bag}\ [\,]\ \Leftrightarrow\ (h:t) = [\,]\ \Leftrightarrow$ FALSE, pois a permutação de $[\,]$ é $[\,]$ e $h:t$ tem pelo menos o elemento h, logo $h:t$ não pode nunca ser a lista vazia.

□

Questão 6 Suponha que, no contexto da questão 5, alguém definiu $G' = (id \times \frac{bag}{bag}) \cdot \mathsf{cons}^\circ$. Como é que G' se compara com G definida em (F2)? Justifique a sua resposta.

RESOLUÇÃO: Tem-se (completar justificações):

$$
\begin{array}{cl}
& (h,t)\ G' x \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \langle \exists\ h', t'\ :\ (h,t)\ (id \times \dfrac{bag}{bag})\ (h',t')\ :\ (h':t') = x \rangle \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \langle \exists\ t'\ :\ bag\ t = bag\ t'\ :\ (h:t') = x \rangle
\end{array}
$$

Portanto, enquanto que

- $(h,t)\ G\ x$ significa que $h:t$ é uma permutação de x,
- $(h,t)\ G'\ x$ significa que h é a cabeça de x e t uma permutação da cauda de x

□

Questão 7 Recorde, das aulas:

$(f\ X) \subseteq Y \equiv X \subseteq (g\ Y)$			
Description	f	g	**Obs.**
implication	$(R\,\cap)$	$(R \Rightarrow)$	$b\ (R \Rightarrow X)\ a \equiv b\ R\ a \Rightarrow b\ X\ a$

Mostre que a igualdade

$$(\top \Rightarrow S) = S \tag{F3}$$

se verifica, mas *sem recorrer ao que está escrito em **Obs***. **Sugestão**: use igualdade indirecta.

RESOLUÇÃO: Tem-se (completar justificações):

$$
\begin{array}{cl}
 & (\top \Rightarrow S) = S \\
\equiv & \qquad \{ \text{ igualdade indirecta } \} \\
 & \langle \forall\, X\ ::\ X \subseteq (\top \Rightarrow S) \Leftrightarrow X \subseteq S \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \langle \forall\, X\ ::\ X \cap \top \subseteq S \Leftrightarrow X \subseteq S \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \langle \forall\, X\ ::\ X \subseteq S \Leftrightarrow X \subseteq S \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \mathrm{TRUE}
\end{array}
$$

□

Questão 8 Uma operação binária $x\ \theta\ y$ diz-se *permutativa* sempre que $(\theta\ a) \cdot (\theta\ b) = (\theta\ b) \cdot (\theta\ a)$ quaisquer que sejam a e b. A divisão inteira $x \div y$, especificada por

$$z \times y \leqslant x \quad \Leftrightarrow \quad z \leqslant x \div y \tag{F4}$$

é permutativa. Complete a demonstração que se segue desse facto:

$$
\begin{array}{cl}
 & (\div a) \cdot (\div b) = (\div b) \cdot (\div a) \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & (x \div b) \div a = (x \div a) \div b \\
:: & \qquad \{ \text{ igualdade indirecta sobre } \leqslant \text{ em } \mathbb{N}_0 \ \} \\
 & z \leqslant (x \div b) \div a \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & z \times a \leqslant x \div b \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & (z \times a) \times b \leqslant x \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & z \leqslant (x \div a) \div b
\end{array}
$$

□

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{array}{ll}
& (\div a) \cdot (\div b) = (\div b) \cdot (\div a) \\
\equiv & \quad \{ \text{ pointwise: } (\div x)\ y = y \div x \ \} \\
& (x \div b) \div a = (x \div a) \div b \\
:: & \quad \{ \text{ igualdade indirecta sobre } \leqslant \text{ em } \mathbb{N}_0 \ \} \\
& z \leqslant (x \div b) \div a \\
\equiv & \quad \{ \text{ GC } (\times a) \dashv (\div a) \ \} \\
& z \times a \leqslant x \div b \\
\equiv & \quad \{ \text{ GC } (\times b) \dashv (\div b) \ \} \\
& (z \times a) \times b \leqslant x \\
\equiv & \quad \{ \text{ multiplicação é associativa e comutativa } \} \\
& (z \times b) \times a \leqslant x \\
\equiv & \quad \{ \text{ GC } (\times a) \dashv (\div a) \ \} \\
& z \times b \leqslant x \div a \\
\equiv & \quad \{ \text{ GC } (\times b) \dashv (\div b) \ \} \\
& z \leqslant (x \div a) \div b
\end{array}
$$

□

□
