Cálculo de Sistemas de Informação
Perfil: MÉTODOS FORMAIS EM ENGENHARIA DE SOFTWARE

1.º/4.º Ano de MEI & MMC / MiEI, Universidade do Minho
Ano Lectivo de 2020/21

Exame de recurso — 15 de Fevereiro de 2021
14h00–16h00
Prova on-line via BBC

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de* ***8*** *questões que valem, cada uma, 2.5 valores.*
- *Ao submeterem o seu teste no BB os alunos* ***vinculam-se*** *implicitamente à seguinte declaração:*

  Tendo presente o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho e o Regulamento Disciplinar dos Estudantes da Universidade do Minho (Despacho RT-80/2019) e tendo conhecimento das sanções aplicáveis a atos de infração disciplinar, declaro por minha honra que pautarei a minha conduta na resolução desta prova de avaliação pelos valores de ética e integridade académica vigentes na Universidade do Minho. Declaro que realizarei a prova autonomamente e recorrendo exclusivamente aos elementos de consulta autorizada. Confirmo ainda que não incorrerei em qualquer ato de desonestidade, nomeadamente, os que violam os princípios éticos inerentes a processos de avaliação, como a prática de plágio ou qualquer outra forma indevida de utilização de informações. Mais declaro que não me envolverei em situações de prestação de informação ou apoio indevidos no decurso das provas que venha a realizar.
- *Os alunos devem escrever o seu* ***número mecanográfico*** *nas folhas cujas imagens vão submeter electronicamente.*
- *Os alunos que não queiram manter a nota do* ***miniteste*** *devem responder a todas as questões, submetendo a prova ao fim de duas horas.*
- *Os alunos que desejam manter a nota do* ***miniteste*** *devem responder apenas à parte B (questões 5, 6, 7, 8), devendo nesse caso submeter a prova ao fim de uma hora.*

PROVA COM CONSULTA (1 ou 2 horas)

Parte A

Questão 1 Apresente justificações para a seguinte demonstração de que a conversa de uma coreflexiva é ela própria:

$$
\begin{array}{ll}
& \Phi_p = \Phi_p^\circ \\
\equiv & \quad \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
& \Phi_p \subseteq \Phi_p^\circ \\
\equiv & \quad \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
& \Phi_p \subseteq id \cdot \Phi_p^\circ \cdot id \\
\Leftarrow & \quad \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
& \Phi_p \subseteq \Phi_p \cdot \Phi_p^\circ \cdot \Phi_p \\
\equiv & \quad \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
& \Phi_p \subseteq \Phi_p \\
\equiv & \quad \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
& true \\
\Box &
\end{array}
$$

Questão 2 Demonstre a propriedade

$$(R \times S) \cdot \langle id, id \rangle \quad = \quad \langle R, S \rangle \tag{F1}$$

sem recorrer à lei de absorção-$\times$.

Questão 3 Um ginásio faz o registo biométrico dos seus utentes (U), que inclui uma relação $R : U \to P$ que regista o respectivo peso (P). R é simples, pois o peso actual de um mesmo utente é único, quando medido.

Pretendendo registar a evolução dos pesos ao longo do tempo (T), o ginásio migrou a informação de R para uma relação $S : U \times T \to P$ da forma seguinte

$$S = R \cdot \langle id, \underline{t_0} \rangle^{\circ} \tag{F2}$$

onde $t_0 \in T$ é o instante em que foi feita a migração. Quer dizer, todos os registos que R tinha ficaram asociados ao instante t_0.

Que garantias temos que S seja também simples? E se a migração tivesse sido feita com $\top$ em lugar de $\underline{t_0}$, deixando o sistema associar quaisquer instantes em T aos registos que estão a ser migrados? Apresente cálculos relacionais que justifiquem a sua resposta.

Questão 4 Uma relação $R : A \to A$ diz-se localmente reflexiva sempre que a implicação $y\ R\ x \Rightarrow y\ R\ y \wedge x\ R\ x$ se verifica, isto é, se tem:

$$R \ \subseteq \ (R \cap id) \cdot \top \cdot (id \cap R) \tag{F3}$$

Indique, justificando formalmente, quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Toda a relação reflexiva é localmente reflexiva.
2. O núcleo de qualquer relação é localmente reflexivo.

Parte B

Questão 5 Os colaboradores (C) de uma rede de supermercados trabalham por turnos (T) nas lojas (L) da rede ou no seu serviço de vendas on-line (V). Seja $C \times T \xrightarrow{M} L + V$ a relação simples que regista todos os turnos dos colaboradores até ao momento. De cada colaborador sabe-se também a sua área geográfica (A) de residência ($C \xrightarrow{res} A$) e também se sabe a área geográfica de cada loja ($L \xrightarrow{ag} A$).

Considere a relação correflexiva $C \xleftarrow{\Phi_p} C$ definida como se segue:

$$\begin{array}{l} \Phi_p = id \cap R \setminus S \textbf{ where} \\ \quad R = i_1^{\circ} \cdot M \cdot \pi_1^{\circ} \\ \quad S = \frac{ag}{res} \end{array}$$

O predicado p caracteriza colaboradores que têm gosado de uma situação especial: consegue dizer qual, por palavras suas? Justifique adequadamente a sua resposta fazendo um diagrama de Φ_p e interpretando o seu significado por introdução de variáveis.

Questão 6 A função (em Haskell) $maybe :: b \to (a \to b) \to Maybe\ a \to b$ aplica o segundo argumento ao terceiro quando este for Just x, retornando o primeiro argumento caso contrário. Tomando

$$\left\{ \begin{array}{l} Maybe\ X = 1 + X \\ Maybe\ R = id + R \end{array} \right. \tag{F4}$$

como *relator* associado ao tipo $Maybe$, calcule o teorema grátis de $maybe$ e mostre que a seguinte propriedade de fusão é um dos seus corolários:

$$s \cdot (maybe\ b\ f) = maybe\ (s\ b)\ (s \cdot f) \tag{F5}$$

Questão 7 Recorde o pequeno caso de estudo desta disciplina sobre modelação da sinalização de uma rede ferroviária R constituída por *segmentos* de via interligados entre si, designados N(etwork) e(lements):

$$Sw \xleftarrow{S} Ne \xleftarrow{R} Ne \xrightarrow{P} Sl$$

P indica a colocação de sinais (Sl), necessários sempre que dois segmentos se juntam, para servirem de semáforos e S indica a colocação de agulhas (ou *switches* Sw) sempre que uma linha se bifurca. Só faz sentido haver agulhas em bifurcações e daí o invariante:

$$switchOk(S, R, P) \quad = \quad \delta\ S\ \subseteq\ R^\circ \cdot (\neg\ id) \cdot R \tag{F6}$$

Seja dada a seguinte operação que coloca a agulha s no elemento n:

$$addSwitch\ (s, n)\ (S, R, P) = (S \cup \underline{s} \cdot \underline{n}^\circ, R, P) \tag{F7}$$

Recorra a leis da álgebra relacional para mostrar que

$$\langle \exists\ n_1, n_2\ :\ n_1 \neq n_2 :\ n_1\ R\ n \wedge n_2\ R\ n \rangle \tag{F8}$$

é a pré-condição mais fraca que garante que $addSwitch\ (s, n)$ satisfaz o invariante $switchOk$.

Questão 8 Como se viu nas aulas, é possível converter relações binárias em funções através da chamada *transposição potência* (‘power transpose’),

$$\begin{array}{l} \Lambda R : A \to \mathsf{P}\ B \\ \Lambda R\ a = \{\ b \mid b\ R\ a \} \end{array}$$

que tem

$$f = \Lambda R \quad \Leftrightarrow \quad \in \cdot f = R \tag{F9}$$

como propriedade universal, onde $A \xleftarrow{\in} \mathsf{P}\ A$ é a habitual relação de pertença de conjuntos.

Deduza a partir de (F9) a propriedade de cancelamento-Λ

$$\in \cdot \Lambda R = R \tag{F10}$$

e, de seguida, use as duas propriedades para demonstrar a lei de fusão-Λ:

$$\Lambda R \cdot f = \Lambda(R \cdot f)$$
