Cálculo de Sistemas de Informação
Perfil: MÉTODOS FORMAIS EM ENGENHARIA DE SOFTWARE

1.º/4.º Ano de MEI & MMC / MiEI, Universidade do Minho
Ano Lectivo de 2020/21

Teste — 21 de Janeiro 2021
13h00
Sala E1-1.21

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de* ***8*** *questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo* ***médio*** *estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Os alunos que não queiram manter a nota do* ***miniteste*** *devem responder a todas as questões, entregando a prova ao fim de duas horas.*
- *Os alunos que desejam manter a nota do* ***miniteste*** *devem responder apenas à parte B (questões 5, 6, 7, 8), devendo nesse caso entregar a prova ao fim de uma hora.*

PROVA COM CONSULTA (1 ou 2 horas)

Parte A

Questão 1 Os colaboradores (C) de uma rede de supermercados trabalham por turnos (T) nas lojas (L) da rede ou no seu serviço de vendas on-line (V). Seja

$$C \times T \xrightarrow{M} L + V$$

o mapa actual de serviço dessa rede de lojas, sobre o qual alguém especificou a seguinte propriedade como invariante:

$$inv\ M = \mathbf{let}\ [R, S] = M^\circ\ \mathbf{in}\ \left\{ \begin{array}{l} R^\circ \cdot R \subseteq id \\ R^\circ \cdot S \subseteq \bot \\ S^\circ \cdot S \subseteq id \end{array} \right.$$

(a) Usando as leis da álgebra relacional mostre que este invariante pode ser definido de forma bem mais simples. (b) Na sua opinião, qual é a intenção do programador ao forçar esta propriedade do sistema de informação? Justifique a sua resposta.

Questão 2 Demonstre a equivalência seguinte:

$$f \cdot g^\circ \text{ é simétrica} \quad \equiv \quad \frac{f}{g} \cdot \frac{f}{g} \text{ é reflexiva} \qquad \text{(F1)}$$

Questão 3 Prove a igualdade

$$\pi_1 = \langle id, \top \rangle^\circ \qquad \text{(F2)}$$

e use-a para demonstrar:

$$\pi_1 \cdot \langle R, S \rangle = R \cdot \delta\ S \qquad \text{(F3)}$$

PS: recorda-se que o domínio de uma relação binária é uma relação coreflexiva.

Questão 4 Apresente justificações para a seguinte prova do facto $R \subseteq R \cdot R^\circ \cdot R$:

$$
\begin{array}{ll}
 & R \subseteq R \cdot R^\circ \cdot R \\
\Leftarrow & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & R \subseteq (R \cdot R^\circ \cap id) \cdot R \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & R \subseteq \rho\, R \cdot R \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & true \\
\Box &
\end{array}
$$

Parte B

Questão 5 O facto seguinte sobre a **reunião** de relações é fácil de demonstrar:

$$R \cup S = R \quad \Leftarrow \quad S \subseteq R$$

Será a mesma propriedade válida para a **sobreposição** de relações? Cf:

$$R \dagger S = R \quad \Leftarrow \quad S \subseteq R \tag{F4}$$

Resposta afirmativa: demonstrar (F4); resposta negativa: apresentar um contra-exemplo, justificando.

Questão 6 Em *hackage.haskell.org* lê-se, na biblioteca $Data.List$:

> $break :: (a \to \mathbb{B}) \to [\,a\,] \to ([\,a\,], [\,a\,])$
> *break, applied to a predicate* p *and a list* xs*, returns a tuple where first element is longest prefix (possibly empty) of* xs *of elements that do not satisfy* p *and second element is the remainder of the list:*
>
> > $break\ ({>}3)\ [1,2,3,4,1,2,3,4] \equiv ([1,2,3],[4,1,2,3,4])$
> > *(...)*

Infira o teorema grátis de $break$ e derive dele a seguinte instância para funções, para toda a lista x:

$$
\begin{array}{l}
\textbf{let} \\
\quad (y_1, y_2) = break\ q\ (\mathsf{map}\ f\ x) \\
\quad (x_1, x_2) = break\ (q \cdot f)\ x \\
\textbf{in}\ y_1 = \mathsf{map}\ f\ x_1 \wedge y_2 = \mathsf{map}\ f\ x_2
\end{array}
$$

Questão 7 Recorde o pequeno caso de estudo desta disciplina sobre modelação da sinalização de uma rede ferroviária R constituída por *segmentos* de via interligados entre si, designados N(etwork) e(lements):

$$Ne \xleftarrow{R} Ne \xrightarrow{S} Sl$$

S indica a colocação de sinais (Sl), necessários sempre que dois segmentos se juntam, para servirem de semáforos. Daí o invariante:

$$joinOk(R, S) \quad = \quad \ker R - id \ \subseteq \ S^\circ \cdot \top \cdot S \tag{F5}$$

Seja dada a seguinte operação que liga o elemento m ao elemento n:

$$link\ (m, n)\ (R, S) = (R \cup \underline{n} \cdot \underline{m}^\circ, S) \tag{F6}$$

Complete o cálculo da pré-condição mais fraca que garante a preservação de $joinOk$ por $link$, justificando os passos já dados:

$$
\begin{array}{ll}
 & joinOk\ (link\ (m, n)\ (R, S)) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & joinOk\ (R \cup \underline{n} \cdot \underline{m}^\circ, S) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \ker\ (R \cup \underline{n} \cdot \underline{m}^\circ) \ \subseteq \ S^\circ \cdot \top \cdot S \cup id \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \vdots \ \text{... (vários passos) ...} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & joinOk\ (R, S) \wedge \underbrace{\langle \forall\ k\ :\ n\ R\ k \wedge k \neq m :\ \langle \exists\ s, s'\ :\ s\ S\ k :\ s'\ S\ m \rangle \rangle}_{WP} \\
\Box &
\end{array}
$$

Questão 8 Considere o seguinte catamorfismo relacional sobre listas:

$$
\begin{array}{l}
X_p : A^* \to A^* \\
X_p = (\!|\, [\mathsf{nil}, \mathsf{cons} \cdot (\Phi_p \times id)] \,|\!)
\end{array}
$$

Avalie a veracidade das afirmações seguintes, justificando:

1. X_p é uma relação coreflexiva
2. X_p não é uma relação simples
3. $x\ X_p\ x \Leftarrow x = [\,]$
