

Metodos Formais em Engenharia de Software (2022/2023)

SAT solving

Comece por instalar um SAT solver. Recomendamos que instale o MiniSat.

O formato DIMACS CNF

A fórmula proposicional $A_1 \wedge (A_1 \vee P) \wedge (\neg A_1 \vee \neg P \vee A_2) \wedge (A_1 \vee \neg A_2)$ encontra-se já em CNF e pode ser escrita no formato DIMACS como se segue (`example.cnf`):

```
p cnf 3 4
1 0
1 3 0
-1 -3 2 0
1 -2 0
```

Exemplifica-se a invocação de um solver com o MiniSat:

```
$ minisat example.cnf OUT
```

A solução calculada é:

```
SAT
1 -2 -3 0
```

ou seja, $A_1 = 1$, $A_2 = 0$ e $P = 0$.

Exercício 1 (Experimentando um SAT solver) Invoque um SAT solver com os ficheiros (em formato DIMACS CNF) `meeting.cnf`, `sat-100v429c.cnf` e `unsat-175v753c.cnf` e analise a resposta do solver.

Exercício 2 (Classificação de fórmulas) Com a ajuda de um SAT solver, responda às seguintes questões:

1. A fórmula $A \vee B \rightarrow A \vee C$ é satisfazível? É uma contradição? É refutável? É válida?
2. A fórmula $(A \rightarrow B \vee C) \wedge \neg(A \wedge \neg B \rightarrow C)$ é satisfazível? É válida? É uma contradição? É refutável?
3. A fórmula $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \rightarrow A$ é válida? É refutável? É uma contradição? É satisfazível?

Exercício 3 (Puzzle do unicórnio) Considere o seguinte enigma:

- *If the unicorn is mythical, then it is immortal.*
 - *If the unicorn is not mythical, then it is a mortal mammal.*
 - *If the unicorn is either immortal or a mammal, then it is horned.*
 - *The unicorn is magical if it is horned.*
- *Is the unicorn magical? Is it horned? Is it mythical?*

1. Para o resolver considere 5 variáveis proposicionais, correspondentes a 5 propriedades dos unicórnios, e comece por completar o seguinte ficheiro no formato DIMACS, `unicornpuzzle.cnf`, com a descrição das restrições do puzzle.

```

c The Unicorn puzzle
c
c 1 mythical?
c 2 immortal?
c 3 mammal?
c 4 horned?
c 5 magical?
c
p cnf 5 ???
(...)
```

Depois invoque depois o seu SAT solver para confirmar que o puzzle é satisfazível.

2. Como o puzzle é satisfazível, o SAT solver irá indicar um modelo (i.e., uma atribuição de valores às variáveis que tornam todas as restrições do puzzle verdadeiras). Suponha por exemplo que na invocação acima o solver encontrou a solução seguinte:

```

SAT
-1 -2 3 4 5 0
```

Considerada como solução (modelo), o significado da última linha é:

$$\neg \textit{mythical} \wedge \neg \textit{immortal} \wedge \textit{mammal} \wedge \textit{horned} \wedge \textit{magical}$$

Para obtermos uma nova solução basta incluir no ficheiro `unicornpuzzle.cnf` a negação desta fórmula como restrição:

```
1 2 -3 -4 -5 0
```

Interpretada como restrição, o seu significado exprime que pelo menos um dos valores lógicos atribuídos pelo modelo anterior terá agora de ser diferente.

$$\textit{mythical} \vee \textit{immortal} \vee \neg \textit{mammal} \vee \neg \textit{horned} \vee \neg \textit{magical}$$

Tendo em conta isto, quantos modelos existem para este problema?

3. Comente as restrições que acrescentou para responder à alínea anterior e use agora o SAT solver para responder às perguntas do enigma. Lembre-se do seguinte resultado fundamental:

$$\Gamma \models F \quad \text{sse} \quad \Gamma, \neg F \quad \text{UNSAT}$$

- (a) *Is the unicorn magical?*
- (b) *Is the unicorn horned?*
- (c) *Is the unicorn mythical?*

4. Com a ajuda do solver, responda ainda às seguintes questões:

- (a) Será que é possível a um unicórnio ser simultaneamente mítico e imortal?
- (b) Poderá existir um unicórnio mortal que não seja mamífero?

Exercício 4 (Configuração de produtos) Certos produtos, como é o caso dos automóveis, são altamente personalizáveis. Mas pode haver dependências intrincadas entre configurações. Os clientes podem não estar cientes de todas essas dependências, e poderão escolher opções de configuração inconsistentes.

Como são muitas configurações e muitas dependências, podemos usar um SAT solver para verificar se o cliente escolhe opções de configuração consistentes. Para isso, podemos seguir os seguintes passos:

- Codificar as dependências entre configurações como uma fórmula proposicional ψ .
- Codificar as opções selecionadas pelo cliente como uma fórmula proposicional ϕ .
- Usar o SAT solver para verificar se $\psi \wedge \phi$ não é contraditório.

Considere agora a seguinte dependência entre as configurações disponíveis para a personalização de um automóvel:

“O ar condicionado Thermotronic comfort requer uma bateria de alta capacidade, exceto quando combinado com motores a gasolina de 3,2 litros.”

Será que um cliente pode escolher o ar condicionado Thermotronic comfort, uma bateria de pequena capacidade, mas não escolher o motor de 3,2 litros? Responda a esta pergunta com a ajuda de um SAT solver.

SAT solvers API

Diversos SAT solvers possuem APIs de interface para diferentes linguagem de programação que permitem uma utilização incremental do solver. Por exemplo, a biblioteca **PySAT** (<https://pysathq.github.io>) para Python que fornece uma interface simples para vários SAT solvers.

Exercício 5 (Schedule a meeting) Recorde o problema codificado no ficheiro notebook Python `Meeting.ipynb`.

- *Anne cannot meet on Friday.*
- *Peter can only meet either on Monday, Wednesday or Thursday.*
- *Mike cannot meet neither on Tuesday nor on Thursday.*

– *When can the meeting take place?*

1. Comece por analisar o ficheiro e a resposta do solver. Depois altere o programa de forma a que sejam apresentadas todas as soluções possíveis para o problema.
2. A modelação que fizemos deste problema não está a exigir que a reunião se tem que realizar uma única vez na semana. Acrescente restrições que modelem esta exigência.

Mais alguns problemas

Exercício 6 (Sentando os convidados) Temos 3 cadeiras numa fila (*esquerda, meio, direita*), e precisamos de distribuir por elas 3 convidados (*Ana, Susana e Pedro*), com as seguintes restrições:

- A Ana não quer ficar sentada à beira do Pedro.
 - A Ana não quer ficar na cadeira da esquerda.
 - A Susana não se quer sentar à esquerda do Pedro.
- Será possível sentar os convidados? Como?

Para formular o problema em lógica proposicional, podemos considerar a seguinte indexação de pessoas e cadeiras:

$$\begin{aligned} \text{Ana} &= 1, \text{ Susana} = 2, \text{ Pedro} = 3 \\ \text{esquerda} &= 1, \text{ meio} = 2, \text{ direita} = 3 \end{aligned}$$

Introduzimos depois variáveis proposicionais x_{ij} para $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2, 3\}$, sendo que

$$x_{ij} = 1 \text{ sse a pessoa } i \text{ ficar sentada na cadeira } j$$

As restrições a escrever pertencem a várias categorias:

- Todas as pessoas devem estar sentadas numa cadeira.
 - Não se poderá sentar mais do que uma pessoa em cada cadeira.
 - Restrições correspondentes aos requisitos de cada pessoa.
1. Escreva todas as restrições necessárias para resolver o problema e converta-as em CNF.
 2. Crie o ficheiro DIMACS CNF correspondente e invoque o SAT solver.
Sugestão: Pode implementar um pequeno programa (por exemplo, em C ou em Phyton) para gerar o ficheiro DIMACS CNF para enviar ao SAT solver. Note que pode criar uma matriz ou um dicionário, x , de forma a fazer o mapeamento entre cada variável proposicional $x[i][j]$ e o valor inteiro que lhe corresponde no formato DIMACS CNF.
 3. Desenvolva um programa em Python para resolver este problema, recorrendo ao PySAT.

Exercício 7 (Equivalência de cadeias *if-then-else*) Considere os programas

- ```
(1) if (!a && !b) h();
 else if (!a) g();
 else f();

(2) if (a) f();
 else if (b) g();
 else h();
```

É possível determinar se eles são equivalentes com a ajuda de um SAT solver. Para isso codificamos logicamente cada um deles, usando a seguinte regra de compilação:

$$\text{compile}(\text{if } x \text{ then } y \text{ else } z) = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z)$$

Basta depois decidir se as fórmulas  $\text{compile}(\mathbf{1})$  e  $\text{compile}(\mathbf{2})$  são **equivalentes**. Para isso teremos que resolver um problema de **validade** da fórmula

$$\text{compile}(\mathbf{1}) \leftrightarrow \text{compile}(\mathbf{2})$$

Para resolver um problema de validade com um SAT solver, há que negar a fórmula:

$$\begin{aligned} & \neg(\text{compile}(\mathbf{1}) \leftrightarrow \text{compile}(\mathbf{2})) \\ \equiv & \\ & \neg((\text{compile}(\mathbf{1}) \wedge \text{compile}(\mathbf{2})) \vee (\neg \text{compile}(\mathbf{1}) \wedge \neg \text{compile}(\mathbf{2}))) \\ \equiv & \\ & (\neg \text{compile}(\mathbf{1}) \vee \neg \text{compile}(\mathbf{2})) \wedge (\text{compile}(\mathbf{1}) \vee \text{compile}(\mathbf{2})) \end{aligned}$$

Se esta fórmula negada for UNSAT, então os programas serão equivalentes.

Considerando variáveis  $a, b, f, g, h$ , codifique os programas **(1)** e **(2)** acima e determine, convertendo a fórmula para CNF e usando o SAT solver, se eles são ou não equivalentes.

### Exercício 8 (Sudoku)

Os puzzles Sudoku são problemas de colocação de números inteiros entre 1 e  $N^2$  numa matriz quadrada de dimensão  $N^2$ , por forma a que cada coluna e cada linha contenha todos os números, sem repetições. Além disso, cada matriz contém  $N^2$  sub-matrizes quadradas disjuntas, de dimensão  $N$ , que deverão também elas conter os números entre 1 e  $N^2$ .

Cada problema é dado por uma matriz parcialmente preenchida, cabendo ao jogador completá-la.

O problema pode ser codificado em lógica proposicional criando uma variável proposicional para cada triplo  $(l, c, n)$ , onde  $l$  é uma linha,  $c$  é uma coluna, e  $n$  é um número.  $x_{l,c,n} = 1$  se na linha  $l$ , coluna  $c$ , estiver o número  $n$ , caso contrário será 0.

Tendo em conta o exposto:

1. Modele o problema do Sudoku como um problema SAT, escrevendo as restrições correspondentes às regras do puzzle.
2. Desenvolva um pequeno programa em Python que recebe um tabuleiro Sudoku (por exemplo, a partir de um ficheiro de texto no formato que entender) e imprime o tabuleiro resolvido.