

Cálculo de Programas

Algebra of Programming

Lic. Ciências da Computação (3º ano)
Lic. em Engenharia Informática (3º ano)
UNIVERSIDADE DO MINHO

2026/27 — Ficha (Worksheet) nr.º 1

Revisões de PF (*Functional Programming background*)

1. Complete a codificação abaixo (em Haskell) das funções $\text{length} :: [a] \rightarrow \mathbb{Z}$ e $\text{reverse} :: [a] \rightarrow [a]$ que conhece da disciplina de Programação Funcional (PF) e que, respectivamente, calculam o comprimento da lista de entrada e a invertem:

```
length [] = ...  
length (x : xs) = ...  
reverse [] = ...  
reverse (x : xs) = ...
```

Complete the code below (in Haskell) of functions $\text{length} :: [a] \rightarrow \mathbb{Z}$ and $\text{reverse} :: [a] \rightarrow [a]$ that you know from the Functional Programming (PF) course and that, respectively, calculate the length of the input list and reverse it:

2. A função $\text{take} :: \mathbb{Z} \rightarrow [a] \rightarrow [a]$ é tal que $\text{take } n \ x$ é o mais longo prefixo da lista x cujo comprimento não excede n . Complete a seguinte formulação de uma propriedade da função take :

$$\text{take } m (\text{take } n \ x) = \text{take } (m \dots n) \ x$$

The function $\text{take} :: \mathbb{Z} \rightarrow [a] \rightarrow [a]$ is such that $\text{take } n \ x$ is the longest prefix of list x whose length does not exceed n . Complete the following statement of a property of take :

3. Apresente definições em Haskell das seguintes funções que estudou em PF:

Give Haskell definitions for the following functions that you studied in the Functional Programming course:

```
map :: (a → b) → [a] → [b]  
filter :: (a → ℬ) → [a] → [a]  
uncurry :: (a → b → c) → (a, b) → c  
curry :: ((a, b) → c) → a → b → c  
flip · :: (a → b → c) → b → a → c
```

-
4. A **composição** de funções define-se, em Haskell, tal como na matemática:

*Function **composition** is defined, in Haskell, just as in mathematics:*

$$(f \cdot g) x = f (g x) \quad (\text{F1})$$

Calcule $(f \cdot g) x$ para os casos seguintes:

Evaluate $(f \cdot g) x$ for the following cases:

$$\begin{cases} f x = 2 * x \\ g x = x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} f = \text{succ} \\ g x = 2 * x \end{cases} \quad \begin{cases} f = \text{succ} \\ g = \text{length} \end{cases} \quad \begin{cases} g (x, y) = x + y \\ f = \text{succ} \cdot (2*) \end{cases}$$

Anime as composições funcionais acima num interpretador de Haskell.

Animate the above functional compositions in a Haskell interpreter.

-
5. Mostre que $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$, quaisquer que sejam f, g e h .

Show that the equality $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ holds for all f, g and h .

-
6. A função $\text{id} :: a \rightarrow a$ é tal que $\text{id } x = x$. Mostre que $f \cdot \text{id} = \text{id} \cdot f = f$ qualquer que seja f .

The function $\text{id} :: a \rightarrow a$ is such that $\text{id } x = x$. Show that $f \cdot \text{id} = \text{id} \cdot f = f$ for all f .

-
7. (a) Defina em Haskell a operação de concatenação de duas listas:

(a) Define in Haskell the operation that concatenates two lists:

$$(\text{++}) :: [a] \rightarrow [a] \rightarrow [a]$$

(b) De uma concatenação $x \text{ ++ } y$ não é possível reconstituir as listas x e y que foram juntas. (Matematicamente, diz-se que (++) não é uma função *injectiva*.) Mas, se usarmos uma função auxiliar f que capte a informação que foi perdida por (++) , isso já deverá ser possível. Apresente definições para f e unconc em

(b) From $x \text{ ++ } y$ one cannot (in general) reconstruct the lists x and y that were joined. (Mathematically, one says that (++) is not an injective function.) However, an auxiliary function f can be used to capture the information that was lost by (++) , making that possible. Give definitions for f and unconc in

$$\text{conc } (x, y) = (f x, x \text{ ++ } y)$$

$$\text{unconc } (a, b) = \dots$$

$$f = \dots$$

por forma a que $\text{unconc} \cdot \text{conc} = \text{id}$.

so that $\text{unconc} \cdot \text{conc} = \text{id}$.

-
8. Considere o seguinte problema:

Consider the following problem:

*(...) For each **list of calls** stored in an old mobile phone (eg. numbers dialled, SMS messages, lost calls), the **store** operation should work in a way such that (a) the more recently a **call** is made the more accessible it is; (b) no number appears twice in a list; (c) only the most recent 10 entries in each list are stored.*

Considere ainda a seguinte proposta de resolução que usa a composição de funções, uma por cada requisito do problema:

Further consider the following solution proposal which uses function composition, one function for each requirement of the problem:

$$\text{store } c = \underbrace{\text{take } 10}_{(c)} \cdot \underbrace{\text{nub}}_{(b)} \cdot \underbrace{(c:)}_{(a)} \quad (\text{F2})$$

(a) Usando a definição (F1) tantas vezes quanto necessário, avalie as expressões

(a) Using definition (F1) as many times as needed, evaluate the expressions

`store 7 [1..10]`

`store 11 [1..10]`

(b) Suponha que alguém usou a mesma abordagem ao problema, mas enganou-se na ordem das etapas:

(b) Suppose someone used the same approach to the problem, but got the steps in the wrong order:

`store c = (c:) · take 10 · nub`

Qual é o problema desta solução? Que requisitos (a,b,c) viola?

What is the problem with this solution? Which requirements (a,b,c) does it violate?

(c) E se o engano for como escreve a seguir?

(c) What if the mistake is as written below?

`store c = nub · (c:) · take 10`

Conclua que a composição não é mesmo nada comutativa — a ordem entre as etapas de uma solução composicional é importante!

Conclude that composition is not commutative at all — the order between the steps of a compositional solution is important!

9. Voltando a agora à definição *certa* (F2), suponha que submete ao seu interpretador de Haskell a expressão:

Returning to definition (F2), suppose you submit the following expression to your Haskell interpreter:

`store "Mary" ["Manuel", "Tia Irene", "Mary", "Augusto"]`

Que espera do resultado? Vai dar erro? Tem que mexer em (F2) para funcionar? Que propriedade da linguagem é evidenciada neste exemplo?

What is the outcome you expect? Will it be an error? Do I need to change (F2) for the above to work? What property of the Haskell programming language is made evident in this example?