Cálculo de Programas
Algebra of Programming

Lic./Mest.Int. em Engenharia Informática (3º ano)
Lic. Ciências da Computação (2º ano)
UNIVERSIDADE DO MINHO

2024/25 - Ficha nr.° 4

1. Considere o isomorfismo

Consider the isomorphism

$$\begin{tikzcd} (A+B)+C \arrow[rr, bend left, "\mathsf{coassocr}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & & A+(B+C) \arrow[ll, bend left, "\mathsf{coassocl}"] \end{tikzcd}$$

onde $\mathsf{coassocr} = [id + i_1 \ , i_2 \cdot i_2]$. Calcule a sua conversa resolvendo em ordem a $\mathsf{coassocl}$ a equação,

where $\mathsf{coassocr} = [id + i_1 \ , i_2 \cdot i_2]$. *Find its converse* $\mathsf{coassocl}$ *by solving the equation,*

$$\mathsf{coassocl} \cdot \mathsf{coassocr} \quad = \quad id$$

isto é, a equação

that is, the equation

$$\mathsf{coassocl} \cdot \underbrace{[id + i_1 \ , i_2 \cdot i_2]}_{\mathsf{coassocr}} = id$$

Finalmente, exprima $\mathsf{coassocl}$ sob a forma de um programa em Haskell *não recorra* ao combinador "either"e teste as duas versões no GHCi.
..

Finally express $\mathsf{coassocl}$ *in pointwise Haskell code not using the "either"combinator a test both versions on GHCi*

---

2. Considere a seguinte declaração de um tipo de *árvores binárias*, em Haskell:

Consider the following definition in Haskell of a particular type of binary tree*:*

$$\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = \mathit{Leaf}\ a \mid \mathit{Fork}\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$$

Indagando os tipos dos construtores *Leaf* e *Fork*, por exemplo no GHCi,

By querying the types of constructors Leaf and Fork in GHCi, for example,

```
*LTree> :t Fork
Fork :: (LTree a, LTree a) -> LTree a
*LTree> :t Leaf
Leaf :: a -> LTree a
```

faz sentido definir a função que mostra como construir árvores deste tipo:

one can define

$$\mathsf{in} = [Leaf\ , Fork] \tag{F1}$$

Desenhe um diagrama para esta função e calcule a sua inversa

capturing how data of this type are built. Draw a diagram for this function and find its inverse,

$$\begin{array}{l} \mathsf{out}\ (Leaf\ a) = i_1\ a \\ \mathsf{out}\ (Fork\ (x, y)) = i_2\ (x, y) \end{array}$$

de novo resolvendo a equação $\mathsf{out} \cdot \mathsf{in} = id$ em ordem a out, agora para o (F1).
Finalmente, faça testes em Haskell que involvam a composição $\mathsf{in} \cdot \mathsf{out}$ e tire conclusões.

again solving the equation $\mathsf{out} \cdot \mathsf{in} = id$ *for* out, *but now with respect to (F1).*
Finally, run tests in Haskell involving the composition $\mathsf{in} \cdot \mathsf{out}$ *and draw conclusions.*

---

3. Deduza o tipo mais geral da função $\alpha = (id + \pi_1) \cdot i_2 \cdot \pi_2$ e represente-o através de um diagrama.

   Infer the most general type of function $\alpha = (id + \pi_1) \cdot i_2 \cdot \pi_2$ *and draw it in a diagram of compositions.*

---

4. Considere a função

   Let

$$\alpha = \mathsf{swap} \cdot (id \times \mathsf{swap}) \tag{F2}$$

   Calcule o tipo mais geral de α e formule a sua propriedade natural (grátis) a inferir através de um diagrama, como se explicou na aula teórica.

   be given. Infer the most general type of α *and the associated natural ("free") property using a diagram, as shown in the theory class.*

---

5. Considere as seguintes funções elementares que respectivamente juntam ou duplicam informação:

   Let the following basic functions be given that, respectively, gather or duplicate information:

$$join = [id\ , id] \tag{F3}$$

$$dup = \langle id, id \rangle \tag{F4}$$

   Calcule (justificando) a propriedade grátis da função $\alpha = dup \cdot join$ e indique por que razão não pode calcular essa propriedade para $join \cdot dup$.

   Calculate (justifying) the free property of the function $\alpha = dup \cdot join$ *and indicate why you cannot calculate this property for* $join \cdot dup$*.*

---

6. Seja dada uma função ∇ da qual só sabe duas propriedades: $\nabla \cdot i_1 = id$ e $\nabla \cdot i_2 = id$. Mostre que, necessariamente, ∇ satisfaz também a propriedade natural

   Suppose that, about a function ∇*, you only know two properties:* $\nabla \cdot i_1 = id$ *and* $\nabla \cdot i_2 = id$*. Show that, necessarily,* ∇ *also satisfies the natural property*

$$f \cdot \nabla = \nabla \cdot (f + f) \tag{F5}$$

---

7. Seja dada uma função α cuja propriedade grátis é:

Let α be a function with free property:

$$(f + h) \cdot \alpha \quad = \quad \alpha \cdot (f + g \times h) \tag{F6}$$

Será esta propriedade suficiente para deduzir a definição de α? Justifique analiticamente.

Can a definition of α be inferred from (F6)? Justify.

---

8. O formulário inclui as duas equivalências seguintes, válidas para qualquer isomorfismo α:

Any isomorphism α satisfies the following equivalences (also given in the reference sheet),

$$\alpha \cdot g = h \;\equiv\; g = \alpha^\circ \cdot h \tag{F7}$$

$$g \cdot \alpha = h \;\equiv\; g = h \cdot \alpha^\circ \tag{F8}$$

Recorra a essas propriedades para mostrar que a igualdade

which can be useful to show that the equality

$$h \cdot \mathsf{distr} \cdot (g \times (id + f)) = k$$

é equivalente à igualdade

is equivalent to:

$$h \cdot (g \times id + g \times f) = k \cdot \mathsf{undistr}$$

(**Sugestão:** não ignore a propriedade natural (i.e. *grátis*) do isomorfismo distr.)

*Prove this equivalence. (**Hint:** the free-property of* distr *shoudn't be ingored in the reasoning.)*

---

9. A *lei da troca* (identifique-a no formulário) permite-nos exprimir determinadas funções sob duas formas alternativas, conforme desenhado no respectivo diagrama:

The exchange law *(check this law in the reference sheet) allows one to express certain functions in two alternative forms, as given below:*

$$[\langle f, g\rangle \;, \langle h, k\rangle] = \langle [f \;, h], [g \;, k]\rangle$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[drr, "g"] & A + B & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[d, "k"] \arrow[dll, "h"'] \\ C & C \times D \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & D \end{tikzcd} \tag{F9}$$

Demonstre esta lei recorrendo às propriedades (e.g. universais) dos produtos e dos coprodutos.

Prove this law using the (e.g. universal) properties of products and co-products.

---

10. **Questão prática** — Este problema não irá ser abordado em sala de aula. Os alunos devem tentar resolvê-lo em casa e, querendo, publicarem a sua solução no canal **#geral** do Slack, com vista à sua discussão com colegas.

Open assignment *— This assignment will not be addressed in class. Students should try to solve it at home and, whishing so, publish their solutions in the **#geral** Slack channel, so as to trigger discussion among other colleagues.*

Problem requirements*:*

Well-known services such as Google Maps, Google Analytics, YouTube, MapReduce etc. run on top of Bigtable or successors thereof. Such data systems rely on the so-called key-value NoSQL data model, which is widely adopted because of its efficiency and flexibility.

Key-value stores can be regarded abstractly as lists of pairs $(K \times V)^*$ *in which* K *is a datatype of* keys *and* V *is a type of data* values. *Keys uniquely identify values. Key-value stores with the same type* V *of values can be glued together as the diagram suggests,*

$$\begin{tikzcd}
((K + K') \times V)^* \arrow[r, bend left, "unglue"] & (K \times V)^* \times (K' \times V)^* \arrow[l, bend left, "glue"]
\end{tikzcd}$$

where $unglue$ *performs the action opposite to* $glue$.

Define $glue$ *and* $unglue$ *in Haskell structured along the functional combinators (*$f \cdot g$, $\langle f, g \rangle$, $f \times g$ *and so on) studied in this course and available from library Cp.hs. Use* ***diagrams*** *to plan your solutions, in which you should avoid re-inventing functions over lists already available from the Haskell standard libraries.*

□