

Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2023/24

1º teste — 20 de Março de 2024, 16h00–18h00
Salas 1.05 + 1.07 do Edifício 2

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- Esta prova consta de 8 questões que valem, cada uma, 2,5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.
- Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.

Questão 1 O formulário desta UC inclui as duas equivalências seguintes, válidas para qualquer isomorfismo α :

$$\alpha \cdot g = h \equiv g = \alpha^\circ \cdot h \quad (\text{E1})$$

$$g \cdot \alpha = h \equiv g = h \cdot \alpha^\circ \quad (\text{E2})$$

Recorra a essas propriedades para mostrar que a igualdade

$$h \cdot \text{distr} \cdot (g \times (\text{id} + \beta)) = k$$

é equivalente à igualdade:

$$h \cdot (g \times \text{id} + g \times \beta) = k \cdot \text{undistr}$$

(**Sugestão:** não ignore a propriedade natural (i.e. *grátis*) do isomorfismo distr .)

Questão 2 Recorde o isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \text{Maybe } B & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{out}=\text{id}} \\ \cong \\ \xleftarrow{\text{in}=[\text{Nothing}, \text{Just}]} \end{array} & 1 + B \end{array}$$

e considere a função:

$$\begin{aligned} \text{fromMaybe} &:: a \rightarrow \text{Maybe } a \rightarrow a \\ \text{fromMaybe } a &= [\underline{a}, \text{id}] \cdot \text{out} \end{aligned}$$

Derive a versão *pointwise* de fromMaybe por forma a não recorrer ao combinador de alternativa (vulg. ‘either’) de funções nem a funções constantes.

Questão 3 Resolva em ordem a α a equação,

$$\alpha \cdot [\text{id} + i_1, i_2 \cdot i_2] = \text{id} \quad (\text{E3})$$

identificando o tipo mais geral de α e fazendo um diagrama que descreva a equação dada.

Questão 4 Em Haskell, a função $divMod\ x\ y$ dá como resultado um par (q, r) tal que $x = q \times y + r$. Para $y = 2$ (em \mathbb{N}_0), r ou é 0 ou é 1, o que quer dizer que podemos pensar numa função

$$divMod2 : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{B}$$

que satisfaz as propriedades seguintes:

$$divMod2\ (2\ n) = (n, \text{TRUE}) \tag{E4}$$

$$divMod2\ (2\ n + 1) = (n, \text{FALSE}) \tag{E5}$$

(Ou seja, $divMod2\ x$ dá não só a divisão inteira $x \div 2$ mas também a paridade de x .)

Encontre α em

$$\mathbb{N}_0 \xleftarrow{divMod2} \mathbb{N}_0 \times \mathbb{B} \xrightarrow{\alpha^\circ} \mathbb{N}_0 + \mathbb{N}_0$$

β

tal que

$$\alpha^\circ \cdot divMod2 \cdot \beta = id \tag{E6}$$

para

$$\beta = [even, odd] \tag{E7}$$

$$even\ n = 2\ n \tag{E8}$$

$$odd\ n = 2\ n + 1 \tag{E9}$$

NB: proponha α e demonstre que (E6) se verifica.

Questão 5 Duas funções f e g dizem-se permutativas entre si sempre que a igualdade

$$f \cdot g = g \cdot f \tag{E10}$$

se verifica. Identifique os tipos mais gerais de f e g e verifique se as seguintes funções são permutativas:

$$\begin{cases} f = (a+) \\ g = (b+) \end{cases} \tag{E11}$$

$$\begin{cases} f = \text{assocr} \\ g = \text{assocl} \end{cases} \tag{E12}$$

NB: $(+)$ é a operação de adição num qualquer tipo numérico.

Questão 6 Demonstre a lei do condicional de McCarthy que se segue

$$p \rightarrow (q \rightarrow a, b), b = (p \wedge q) \rightarrow a, b \tag{E13}$$

sabendo que

$$(p \wedge q)? = p \rightarrow q?, i_2 \tag{E14}$$

é uma propriedade da conjunção de predicados.

Questão 7 Seja dada uma função de ordem superior α que satisfaz a propriedade:

$$\widehat{\alpha} f = \widehat{f} \cdot \text{swap} \tag{E15}$$

Mostre, usando as propriedades da exponenciação, que

$$\alpha (\alpha f) = f$$

se verifica.

Questão 8 A função seguinte

$$\begin{aligned} sq\ 0 &= 0 \\ sq\ (n + 1) &= n + n + 1 + sq\ n \end{aligned}$$

calcula o quadrado de um número natural (em \mathbb{N}_0) sem fazer quaisquer multiplicações. Mostre que sq satisfaz a equação

$$sq \cdot \text{in} = [\underline{0}, \text{add}] \cdot (id + id \times sq) \cdot (id + odd \times id) \cdot (id + \langle id, id \rangle) \tag{E16}$$

onde $\overline{\text{add}} = (+)$, $odd\ n = 2\ n + 1$ e in é dada por:

