Cálculo de Programas

2.º Ano de LEI+MiEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2023/24

Exame de Recurso — 15 de Janeiro de 2024, 14h00–16h00
Salas 1.03 + 1.07 do Edifício 2.

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

Questão 1 Recorra às leis que conhece dos produtos, coprodutos e funções constantes para demonstrar a igualdade:

$$[\langle f, \underline{k}\rangle, \langle g, \underline{k}\rangle] \quad = \quad \langle [f, g], \underline{k}\rangle \tag{E1}$$

RESOLUÇÃO: Propõe-se (justificar os passos que são dados):

$$\begin{array}{cl} & [\langle f, \underline{k}\rangle, \langle g, \underline{k}\rangle] \\ = & \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\ & \langle [f, g], [\underline{k}, \underline{k}]\rangle \\ = & \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\ & \langle [f, g], \underline{k} \cdot [id, id]\rangle \\ = & \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\ & \langle [f, g], \underline{k}\rangle \end{array}$$

$\square$

Questão 2 Infira o tipo mais geral da função α definida por

$$\alpha = [\langle id, \mathsf{nil}\rangle, id \times \mathsf{singl}] \tag{E2}$$

onde $\mathsf{nil}\ \_ = [\,]$ e $\mathsf{singl}\ x = [x]$. De seguida, derive desse tipo a propriedade grátis de α.

RESOLUÇÃO: Comecemos por:

- $id : A \to A$

- $\mathsf{nil} : B \to C^*$
- $id : K \to K$
- $\mathsf{singl} : E \to E^*$

Então:

- $\langle id, \mathsf{nil}\rangle$ força $B = A$, i.e. $\langle id, \mathsf{nil}\rangle : A \to A \times C^*$
- $id \times \mathsf{singl} : K \times E \to K \times E^*$

Finalmente:

- $\alpha : A + (A \times C) \to (A \times C^*)$

Propriedade grátis (fazer diagrama e inferir):

$$(f \times \mathsf{map}\ h) \cdot \alpha = \alpha \cdot (f + f \times h)$$

□

Questão 3 Seja dada uma função de ordem superior α que satisfaz a propriedade:

$$\widehat{\alpha\, f} = \widehat{f} \cdot \mathsf{swap} \qquad \text{(E3)}$$

Mostre, usando as propriedades da exponenciação, que

$$\alpha\ (\alpha\ f) = f$$

se verifica.

RESOLUÇÃO: Tem-se de imediato que $\alpha\ f = \overline{\widehat{f} \cdot \mathsf{swap}}$ — α é a função flip $\cdot$. De seguida:

$$
\begin{array}{ll}
& \alpha\ (\overline{\widehat{f} \cdot \mathsf{swap}}) = f \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \overline{\widehat{\overline{(\widehat{f} \cdot \mathsf{swap})}} \cdot \mathsf{swap}} = f \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \overline{\widehat{f} \cdot \mathsf{swap} \cdot \mathsf{swap}} = f \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& f = f
\end{array}
$$

□

Questão 4 A seguinte questão apareceu num teste anterior desta disciplina:

> Considere a estrutura de dados que se segue, estudada nas aulas:
>
> *Árvores com informação de tipo A nos nós :*
>
> $$\mathsf{T} = \mathsf{BTree}\ A \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{B}\ (X, Y) = 1 + X \times Y^2 \\ \mathsf{B}\ (g, f) = id + g \times f^2 \end{array} \right. \qquad \mathsf{in} = [\underline{Empty}, Node]$$
>
> *Haskell:* **data** $\mathsf{BTree}\ a = Empty \mid Node\ (a, (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a))$
>
> Defina como um catamorfismo a função
>
> $$f : \mathsf{BTree}\ A \to A^*$$
> $$f = (\!|\ g\ |\!)$$
>
> isto é, identifique g tal que $f\ t$ seja o caminho a percorrer na árvore t para atingir o seu nó terminal mais à direita.

Uma das respostas que apareceram ao corrigir esse teste foi

$$g = [\mathsf{nil}\,, \pi_1 \cdot \pi_2] \tag{E4}$$

Mostre que $f = (\!|\, [\mathsf{nil}\,, \pi_1 \cdot \pi_2] \,|\!)$ é uma função constante, calculando-a usando as leis do cálculo de programas.

RESOLUÇÃO: Resolvendo $\underline{k} = (\!|\, g \,|\!)$ para o g dado obtém-se $k = [\,]$ isto é $f = \mathsf{nil}$:

$$\begin{array}{l}
\underline{k} = (\!|\, [\mathsf{nil}\,, \pi_1 \cdot \pi_2] \,|\!) \\
\quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
\underline{k} \cdot \mathsf{in} = ([\mathsf{nil}\,, \pi_1 \cdot \pi_2] \cdot (id + id \times \underline{k}^2) \\
\quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
\underline{k} = [\mathsf{nil}\,, \pi_1 \cdot (\underline{k} \times \underline{k}) \cdot \pi_2] \\
\quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
\underline{k} = [\mathsf{nil}\,, \underline{k}] \\
\quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
\underline{k} = \mathsf{nil}
\end{array}$$

□

Questão 5 Mostre que o catamorfismo

$$k = (\!|\, (m \times n) \cdot \langle \mathsf{F}\ \pi_2, \mathsf{F}\ \pi_1 \rangle \,|\!) \tag{E5}$$

se pode decompor em duas funções f e g tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} f \cdot \mathsf{in} = m \cdot \mathsf{F}\ g \\ g \cdot \mathsf{in} = n \cdot \mathsf{F}\ f \end{array} \right.$$

Sugestão: resolva em ordem a f e g a equação

$$\langle f, g \rangle = k$$

onde k é o catamorfismo dado.

RESOLUÇÃO: Justificar os passos que são dados no raciocínio seguinte:

$$\begin{array}{ll}
 & \langle f, g \rangle = (\!|\, (m \times n) \cdot \langle \mathsf{F}\ \pi_2, \mathsf{F}\ \pi_1 \rangle \,|\!) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
 & \langle f, g \rangle = (\!|\, \langle m \cdot \mathsf{F}\ \pi_2, n \cdot \mathsf{F}\ \pi_1 \rangle \,|\!) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} f \cdot \mathsf{in} = m \cdot \mathsf{F}\ \pi_2 \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g \rangle \\ g \cdot \mathsf{in} = n \cdot \mathsf{F}\ \pi_1 \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g \rangle \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} f \cdot \mathsf{in} = m \cdot \mathsf{F}\ g \\ g \cdot \mathsf{in} = n \cdot \mathsf{F}\ f \end{array} \right.
\end{array}$$

□

Questão 6 Considere a seguinte generalização de um resultado que foi abordado nas aulas teórico-práticas,

$$(\!| g |\!) \cdot (\!| \mathsf{in}_2 \cdot \beta |\!) = (\!| g \cdot \alpha |\!) \quad \Leftarrow \quad \mathsf{G}\, f \cdot \beta = \alpha \cdot \mathsf{F}\, f \tag{E6}$$

a que corresponde o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{T}_1 \arrow[d, "(\!| \mathsf{in}_2 \cdot \beta |\!)"'] & & \mathsf{F}\ \mathsf{T}_1 \arrow[ll, "\mathsf{in}_1"'] \arrow[d, "\mathsf{F}\ (\!| \mathsf{in}_2 \cdot \beta |\!)"] \\
\mathsf{T}_2 \arrow[d, "(\!| g |\!)"'] & \mathsf{G}\ \mathsf{T}_2 \arrow[l, "\mathsf{in}_2"] \arrow[d, "\mathsf{G}\ (\!| g |\!)"] & \mathsf{F}\ \mathsf{T}_2 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d, "\mathsf{F}(\!| g |\!)"] \\
C & \mathsf{G}\ C \arrow[l, "g"] & \mathsf{F}C \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Apresente uma demonstração analítica de (E6).

RESOLUÇÃO: Justificar os passos que são dados no raciocínio seguinte:

$$\begin{array}{ll}
& (\!| g |\!) \cdot (\!| \mathsf{in}_2 \cdot \beta |\!) = (\!| g \cdot \alpha |\!) \\
\Leftarrow & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (\!| g |\!) \cdot \mathsf{in}_2 \cdot \beta = g \cdot \alpha \cdot \mathsf{F}\ (\!| g |\!) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& g \cdot \mathsf{G}\ (\!| g |\!) \cdot \beta = g \cdot \alpha \cdot \mathsf{F}\ (\!| g |\!) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& g \cdot \alpha \cdot \mathsf{F}\ (\!| g |\!) = g \cdot \alpha \cdot \mathsf{F}\ (\!| g |\!) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathit{true} \\
& \square
\end{array}$$

$\square$

Questão 7 Conhece com certeza, de Programação Funcional, a função:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mathsf{foldl} :: (b \to a \to b) \to b \to [a] \to b \\
\mathsf{foldl}\ f\ z\ [\,] = z \\
\mathsf{foldl}\ f\ z\ (h : t) = \mathsf{foldl}\ f\ (f\ z\ h)\ t
\end{array} \right.$$

Pode mostrar-se que $\widehat{\mathsf{foldl}\ f} = \mathit{fdl}\ f$ onde

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mathit{fdl}\ f\ (z, [\,]) = z \\
\mathit{fdl}\ f\ (z, h : t) = \mathit{fdl}\ f\ (f\ z\ h, t)
\end{array} \right.$$

Pretendendo-se agora mostrar que $\mathit{fdl}\ f$ é um "ciclo-while disfarçado", para $f : B \to A \to B$, encontre g, h, X e Y no diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \times A^* \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathit{fdl}\ f = \mathbf{tailr}\ g"'] & X \arrow[d, "id + \mathit{fdl}\ f"] \\
B & Y \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$

por forma a se ter $fdl\ f = \mathbf{tailr}\ g$. Justifique a sua resposta. **NB**: recorde a definição $\mathbf{tailr}\ f = [\![[id, id], f]\!]$.

RESOLUÇÃO: Tem-se

$$
\begin{tikzcd}
B \times A^* \arrow[r, "g = divide\ f"] \arrow[d, "fdl\ f = \mathbf{tailr}\ g"'] & B + B \times A^* \arrow[d, "id + fdl\ f"] \\
B & B + B \arrow[l, "{[id, id]}"]
\end{tikzcd}
$$

para

$$
\left\{
\begin{array}{l}
divide\ f\ (z, [\,]) = i_1\ z \\
divide\ f\ (z, h : t) = i_2\ (f\ z\ h, t)
\end{array}
\right.
$$

obtida segundo o método ensinado nas aulas. $\square$

Questão 8 Nas aulas mostrou-se que qualquer functor de tipo $\mathsf{T}\ A \cong A + \mathsf{F}\ (\mathsf{T}\ A)$ é um monade, para um dado F. Deu-se como exemplo o monade $\mathsf{LTree}\ A$, para o qual $\mathsf{F}\ X = X \times X$. Ora, dá-se o facto deste functor F ser também um monade, cf.

$$
A \xrightarrow{u = \langle id, id \rangle} \mathsf{F}\ A \xleftarrow{\mu = \pi_1 \times \pi_2} \mathsf{F}\ (\mathsf{F}\ A) \tag{E7}
$$

e de se poder usar essa informação para extrair $\mathsf{F}\ A$ a partir de $\mathsf{T}\ A$, de forma imediata:

$$
\begin{array}{l}
f : \mathsf{T}\ A \to \mathsf{F}\ A \\
f = (\!|\, [\langle id, id \rangle, \pi_1 \times \pi_2] \,|\!)
\end{array} \tag{E8}
$$

Com base nos detalhes que abaixo se dão sobre LTree, converta o catamorfismo f para Haskell sem quaisquer combinadores *pointfree* e diga, através de um exemplo, o que a função f "faz".

Árvores com informação de tipo A nas folhas :

$$
\mathsf{T} = \mathsf{LTree}\ A \qquad
\left\{
\begin{array}{l}
\mathsf{B}\ (X, Y) = X + Y \times Y \\
\mathsf{B}\ (g, f) = g + f \times f
\end{array}
\right.
\qquad \mathsf{in} = [Leaf, Fork]
$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = Leaf\ a \mid Fork\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{array}{l}
f = (\!|\, [dup, \mu] \,|\!)\ \mathbf{where} \\
\quad \mu = \pi_1 \times \pi_2 \\
\quad dup = \langle id, id \rangle
\end{array}
$$

Então (justificar os passos que são dados):

$$
\begin{array}{ll}
& f = (\!|\, [dup, \mu] \,|\!) \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& f \cdot \mathsf{in} = [dup, \mu] \cdot (id + f \times f) \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}
\end{array}
$$

$$\left\{\begin{array}{l} f \cdot \mathit{Leaf} = \mathit{dup} \\ f \cdot \mathit{Fork} = \mu \cdot (f \times f) \end{array}\right.$$

$$\equiv \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f \; (\mathit{Leaf} \;\; a) = (a, a) \\ f \cdot \mathit{Fork} = (\pi_1 \cdot f \times \pi_2 \cdot f) \end{array}\right.$$

$$\equiv \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f \; (\mathit{Leaf} \;\; a) = (a, a) \\ f \; (\mathit{Fork} \; (t_1, t_2)) = (\pi_1 \; (f \; t_1), \pi_2 \; (f \; t_2)) \end{array}\right.$$

Ou seja:

$$\begin{array}{l} f \; (\mathit{Leaf} \;\; a) = (a, a) \\ f \; (\mathit{Fork} \; (t_1, t_2)) = (l, r) \; \mathbf{where} \\ \quad (l, x) = f \; t_1 \\ \quad (r, x) = f \; t_2 \end{array}$$

f dá as folhas extremas da árvore argumento. $\Box$
