Cálculo de Programas

2.º Ano de LEI+MiEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2023/24

1º Teste — 26 de Outubro de 2023, 17h00–19h00
Salas (Edifício 2) 0.05 + 0.07 + 1.03 + 1.05

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

Questão 1 Resolva, em ordem a f e g, a equação

$$\underline{(x, y)} = \langle f, g \rangle \tag{E1}$$

onde $\underline{k}$ designa a função constante que dá sempre k qualquer que seja o seu argumento. **NB**: reduza f e g à sua expressão mais simples.

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{aligned}
& \underline{(x, y)} = \langle f, g \rangle \\
\equiv \quad & \{ \text{ universal-}\times \text{ (6) } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot \underline{(x, y)} = f \\ \pi_2 \cdot \underline{(x, y)} = g \end{array} \right. \\
\equiv \quad & \{ \text{ fusão-constante (4) } \times 2 \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \underline{\pi_1 \ (x, y)} = f \\ \underline{\pi_2 \ (x, y)} = g \end{array} \right. \\
\equiv \quad & \{ \text{ definição de } \pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ (79) } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f = \underline{x} \\ g = \underline{y} \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

□

Questão 2 Considere a função

$$\alpha = (id + \mathsf{coswap}) \cdot \mathsf{coswap} \tag{E2}$$

onde $\mathsf{coswap} = [i_2\,, i_1]$. Calcule o tipo mais geral de α e formule a sua propriedade natural (grátis), a inferir através de um diagrama, como se explicou nas aulas.

RESOLUÇÃO: Tem-se:

1. **Inferência do tipo mais geral**: por partes, da direita para a esquerda:
   (a) Tipo do coswap da direita: começando com $i_2 : A \to B + A$ e $i_1 : C \to C + D$, teremos que ter

   $$\begin{array}{l} B = C \\ A = D \end{array}$$

   e logo $\mathsf{coswap} : A + B \to B + A$.
   (b) Como temos outro coswap à esquerda, vamos declarar $\mathsf{coswap} : X + Y \to Y + X$ nesse caso.
   (c) Declarando $id : Z \to Z$, ter-se á $(id + \mathsf{coswap}) : Z + (X + Y) \to Z + (Y + X)$.
   (d) A composição em α força $B + A$ igual a $Z + (X + Y)$, logo

   $$\begin{array}{l} B = Z \\ A = X + Y \end{array}$$

   (e) Como $\alpha : A + B \to Z + (Y + X)$, usando as igualdades acima tem-se:

   $$\alpha : (X + Y) + B \to B + (Y + X)$$

2. **Propriedade grátis**: do diagrama

$$\begin{tikzcd}
B + (Y + X) \arrow[d, "f+(h+g)"'] & (X + Y) + B \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "(g+h)+f"] \\
B' + (Y' + X') & (X' + Y') + B' \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

   obtém-se:

   $$(f + (h + g)) \cdot \alpha = \alpha \cdot ((g + h) + f)$$

□

Questão 3 Mostre que a equação em x

$$x \cdot \mathsf{distl} = [f\,, g] \times h \tag{E3}$$

só tem uma solução: $x = [f \times h\,, g \times h]$. **NB:** recorde que o isomorfismo distl tem $[i_1 \times id, i_2 \times id]$ como converso.

RESOLUÇÃO: Tem-se (justificar os passos que são dados):

$$\begin{array}{ll}
& x \cdot \mathsf{distl} = [f\,, g] \times h \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& x = ([f\,, g] \times h) \cdot [i_1 \times id, i_2 \times id] \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& x = [([f\,, g] \times h) \cdot (i_1 \times id)\,, ([f\,, g] \times h) \cdot (i_2 \times id)] \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& x = [[f\,, g] \cdot i_1 \times h\,, [f\,, g] \cdot i_2 \times h] \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& x = [f \times h, g \times h]
\end{array}$$

□

□

Questão 4 Considere a seguinte sessão no GHCi uma vez aberta a biblioteca $Cp.hs$:

```
*Cp> data T = Zero | One Int | Two (Int,Int)
*Cp> :t Zero
Zero :: T
*Cp> :t One
One :: Int -> T
*Cp> :t Two
Two :: (Int, Int) -> T
```

Tendo-se optado por definir

$$\mathsf{in} = [[\underline{Zero}, One], Two]$$

identifique o tipo de in e calcule out a partir da equação $\mathsf{out} \cdot \mathsf{in} = id$.

RESOLUÇÃO: À partida, o tipo mais geral de in será $(A + \mathbb{Z}) + (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \to \mathsf{T}$. Assim, tem-se (justificar os passos que são dados):

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{out} \cdot [[\underline{Zero}, One], Two] = id \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{out} \cdot [\underline{Zero}, One] = i_1 \\ \mathsf{out} \cdot Two = i_2 \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{out} \cdot \underline{Zero} = i_1 \cdot i_1 \\ \mathsf{out} \cdot One = i_1 \cdot i_2 \end{array} \right. \\ \mathsf{out} \cdot Two = i_2 \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{out}\ Zero = i_1\ (i_1\ ()) \\ \mathsf{out}\ (One\ x) = i_1\ (i_2\ x) \\ \mathsf{out}\ Two\ (x, y) = i_2\ (x, y) \end{array} \right. \\
\square &
\end{array}$$

No último passo fez-se $A = 1$ pois de outra forma in deixaria de ser isomorfismo. Contra-exemplo: supor que se fez $A = \mathbb{Z}$ e se optou por $\mathsf{out}\ Zero = i_1\ (i_1\ 0)$. Então $\mathsf{in}\ (i_1\ (i_1\ 0)) = i_1\ (i_1\ 10) = Zero$. (É esta a razão pela qual habitantes de tipo como $Zero$ são sempre representados por "pontos" $\underline{Zero} : 1 \to \mathsf{T}$ e não funções constantes quaisquer $\underline{Zero} : A \to \mathsf{T}$. $\square$

Questão 5 Recordando a definição $\mathsf{join} = [id, id]$, prove a igualdade seguinte:

$$\langle \mathsf{join} \cdot (\pi_1 + \pi_1), \mathsf{join} \cdot (\pi_2 + \pi_2) \rangle = \mathsf{join}$$

RESOLUÇÃO: Tem-se (justificar os passos que são dados):

$$
\begin{array}{ll}
& \langle \mathsf{join} \cdot (\pi_1 + \pi_1), \mathsf{join} \cdot (\pi_2 + \pi_2) \rangle = \mathsf{join} \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \langle [\pi_1 , \pi_1], [\pi_2 , \pi_2] \rangle = \mathsf{join} \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& [\langle \pi_1, \pi_2 \rangle , \langle \pi_1, \pi_2 \rangle] = \mathsf{join} \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& [id , id] = \mathsf{join}
\end{array}
$$

□

Questão 6 Demonstrar

$$(p \rightarrow g \ , \ h) \times f \quad = \quad p \cdot \pi_1 \rightarrow g \times f \ , \ h \times f$$

a partir das leis do condicional de McCarthy e do facto seguinte:

$$q \rightarrow f \ , \ f \quad = \quad f \tag{E4}$$

RESOLUÇÃO: Tem-se (justificar os passos que são dados):

$$
\begin{array}{ll}
& p \cdot \pi_1 \rightarrow g \times f \ , \ h \times f \\
= & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& [\langle g \cdot \pi_1, f \cdot \pi_2 \rangle, \langle h \cdot \pi_1, f \cdot \pi_2 \rangle] \cdot (p \cdot \pi_1)? \\
= & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \langle [g \cdot \pi_1 , h \cdot \pi_1], [f \cdot \pi_2 , f \cdot \pi_2] \rangle \cdot (p \cdot \pi_1)? \\
= & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \langle [g \cdot \pi_1 , h \cdot \pi_1] \cdot (p \cdot \pi_1)?, [f \cdot \pi_2 , f \cdot \pi_2] \cdot (p \cdot \pi_1)? \rangle \\
= & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \langle (p \cdot \pi_1 \rightarrow g \cdot \pi_1 \ , \ h \cdot \pi_1), (p \cdot \pi_1 \rightarrow f \cdot \pi_2 \ , \ f \cdot \pi_2) \rangle \\
= & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \langle (p \rightarrow g \ , \ h) \cdot \pi_1, f \cdot \pi_2 \rangle \\
= & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& (p \rightarrow g \ , \ h) \times f
\end{array}
$$

□

Questão 7 Sejam dadas as seguintes definições de operadores sobre listas:

$$\mathsf{cons}\ (h, t) = h : t \tag{E5}$$

$$\mathsf{nil}\ \_ = [\,] \tag{E6}$$

$$\mathsf{in} = [\mathsf{nil} , \mathsf{cons}] \tag{E7}$$

$$\mathsf{rcons}\ (h, t) = t +\!\!+ [h] \tag{E8}$$

Mostre que definir

$$\left\{\begin{array}{l} invert\ [\,] = [\,] \\ invert\ (a : x) = invert\ x + [\,a\,] \end{array}\right.$$

é a mesma coisa que escrever, sem variáveis:

$$invert \cdot \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\,, \mathsf{rcons} \cdot (id \times invert)]$$

RESOLUÇÃO: Tem-se (justificar os passos que são dados):

$$
\begin{array}{ll}
& invert \cdot \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\,, \mathsf{rcons} \cdot (id \times invert)] \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& [invert \cdot \mathsf{nil}\,, invert \cdot \mathsf{cons}] = [\mathsf{nil}\,, \mathsf{rcons} \cdot (id \times invert)] \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \left\{\begin{array}{l} invert \cdot \mathsf{nil} = \mathsf{nil} \\ invert \cdot \mathsf{cons} = \mathsf{rcons} \cdot (id \times invert) \end{array}\right. \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \left\{\begin{array}{l} invert\ (\mathsf{nil}\ \_) = \mathsf{nil}\ \_ \\ invert\ (\mathsf{cons}\ (x, y)) = (\mathsf{rcons} \cdot (id \times invert))\ (x, y) \end{array}\right. \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \left\{\begin{array}{l} invert\ [\,] = [\,] \\ invert\ (x : y) = \mathsf{rcons}\ (x, invert\ y) \end{array}\right. \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \left\{\begin{array}{l} invert\ [\,] = [\,] \\ invert\ (x : y) = invert\ y + [x] \end{array}\right.
\end{array}
$$

□

Questão 8 Sendo válida a propriedade

$$\mathsf{ap} \cdot \langle \underline{k}, id \rangle = k \tag{E9}$$

apresente justificações para a demonstração que se segue da igualdade $\overline{f}\ a = f \cdot \langle \underline{a}, id \rangle$:

$$
\begin{array}{ll}
& \overline{f}\ a = f \cdot \langle \underline{a}, id \rangle \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \overline{f}\ a = \mathsf{ap} \cdot (\overline{f} \times id) \cdot \langle \underline{a}, id \rangle \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \overline{f}\ a = \mathsf{ap} \cdot \langle \underline{\overline{f}\ a}, id \rangle \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \textsc{True}
\end{array}
$$

□

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{array}{ll}
& \overline{f}\ a = f \cdot \langle \underline{a}, id \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \text{ cancelamento (36) } \} \\
& \overline{f}\ a = \mathsf{ap} \cdot (\overline{f} \times id) \cdot \langle \underline{a}, id \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \text{ absorção-}\times\text{ (11) ; constante (4) ; natural-id (1) } \} \\
& \overline{f}\ a = \mathsf{ap} \cdot \langle \underline{\overline{f}\ a}, id \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \text{ (E9) } \} \\
& \text{TRUE}
\end{array}
$$

$\square$