

Cálculo de Programas

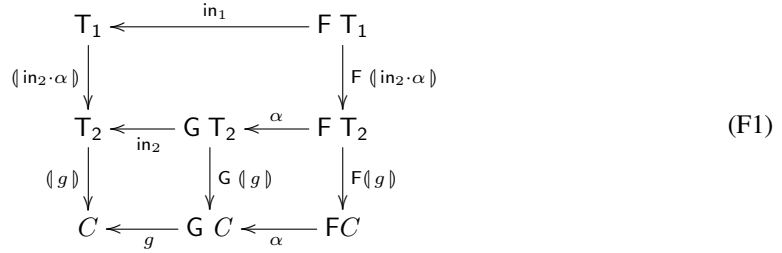
Algebra of Programming

UNIVERSIDADE DO MINHO
Lic. Ciências da Computação (2º ano)
Lic. em Engenharia Informática (3º ano)

2024/25 - Ficha (*Exercise sheet*) nr. 11

1. O diagrama que se segue

The following diagram



compõe dois catamorfismos envolvendo os tipos T_1 (F-recursive) e T_2 (G-recursive):

involves the types T_1 (F-recursive) e T_2 (G-recursive) and two catamorphisms:

$$\begin{aligned}
 \langle g \rangle &: T_2 \rightarrow C \\
 \langle \text{in}_2 \cdot \alpha \rangle &: T_1 \rightarrow T_2
 \end{aligned}$$

Considere-se o caso:

Consider the special case that follows:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= T_2 = \text{LTree } A \\
 F\ f &= id + f \times f \\
 \alpha &= id + \text{swap} \\
 \text{in}_2 &= [\text{Leaf}, \text{Fork}]
 \end{aligned}$$

Desenvolver

Unfold

$$\text{mirror} = \langle \text{in}_2 \cdot \alpha \rangle \tag{F2}$$

até se obter uma definição completamente *pointwise*.

until reaching a fully pointwise definition.

2. A lei

Law

$$\langle g \rangle \cdot \langle \text{in}_2 \cdot \alpha \rangle = \langle g \cdot \alpha \rangle \quad \Leftarrow \quad G\ f \cdot \alpha = \alpha \cdot F\ f \tag{F3}$$

verifica-se — cf. diagrama (F1) — onde a condição

holds — see diagram (F1) — where condition

$$G f \cdot \alpha = \alpha \cdot F f \quad (F4)$$

mais não é que a propriedade grátis de $\alpha : F X \rightarrow G X$. Apresente justificações para a seguinte demonstração de (F3):

is nothing more than the free property of $\alpha : F X \rightarrow G X$. Provide justifications for the following proof of (F3):

$$\begin{aligned} & \llbracket g \rrbracket \cdot \llbracket \text{in}_2 \cdot \alpha \rrbracket = \llbracket g \cdot \alpha \rrbracket \\ \Leftarrow & \{ \dots\dots\dots \} \\ & \llbracket g \rrbracket \cdot \text{in}_2 \cdot \alpha = g \cdot \alpha \cdot F \llbracket g \rrbracket \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & g \cdot G \llbracket g \rrbracket \cdot \alpha = g \cdot \alpha \cdot F \llbracket g \rrbracket \\ \Leftarrow & \{ \dots\dots\dots \} \\ & G \llbracket g \rrbracket \cdot \alpha = \alpha \cdot F \llbracket g \rrbracket \\ \Leftarrow & \{ \dots\dots\dots \} \\ & G f \cdot \alpha = \alpha \cdot F f \end{aligned}$$

3. Na sequência da questão 1 acima, suponha que se tem $\llbracket g \rrbracket = \text{mirror}$ em (F1). Mostre por (F3) que

As follow up of question 1 above, suppose that one has $\llbracket g \rrbracket = \text{mirror}$ in (F1). Show by (F3) that

$$\text{mirror} \cdot \text{mirror} = \text{id} \quad (F5)$$

se verifica.

holds.

4. Recordando a definição $T f = \llbracket \text{in} \cdot B(f, \text{id}) \rrbracket$, mostre que a lei de absorção-cata,

Recalling definition $T f = \llbracket \text{in} \cdot B(f, \text{id}) \rrbracket$, show that the law of absorption-cata,

$$\llbracket g \rrbracket \cdot T f = \llbracket g \cdot B(f, \text{id}) \rrbracket$$

é um caso particular de (F3).

is a special case of (F3).

5. Todo o ciclo-while que termina pode ser definido por

Every terminating while-loop can be defined by

$$\text{while } p f g = \text{tailr } ((g + f) \cdot (\neg \cdot p)?) \quad (F6)$$

recorrendo ao combinador de “tail recursion”

using the “tail recursion” combinator

$$\text{tailr } f = \llbracket \text{join}, f \rrbracket \quad (F7)$$

que é um hilomorfismo de base $B(X, Y) = X + Y$, para $\text{join} = [\text{id}, \text{id}]$.

which is a hylomorphism of basis $B(X, Y) = X + Y$, for $\text{join} = [\text{id}, \text{id}]$.

Derive a definição pointwise de **while** $p f g$, sabendo que qualquer $h = \llbracket f, g \rrbracket$ que termina é tal que $h = f \cdot F h \cdot g$.

*Derive the pointwise definition of **while** $p f g$, knowing that any terminating $h = \llbracket f, g \rrbracket$ is such that $h = f \cdot F h \cdot g$.*

6. Considere a seguinte lei de fusão de **tailr**, válida sempre que $(\mathbf{tailr} \ g) \cdot f$ termina: *Consider the following fusion-law of **tailr**, valid whenever $(\mathbf{tailr} \ g) \cdot f$ terminates:*

$$(\mathbf{tailr} \ g) \cdot f = \mathbf{tailr} \ h \Leftarrow (id + f) \cdot h = g \cdot f \quad (F8)$$

Complete a seguinte demonstração dessa lei.

Complete the following proof of (F8).

$$\begin{aligned} & (\mathbf{tailr} \ g) \cdot f = \mathbf{tailr} \ h \\ \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\ & (\nabla) \cdot \llbracket g \rrbracket \cdot f = (\nabla) \cdot \llbracket h \rrbracket \\ \Leftarrow & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\ & \llbracket g \rrbracket \cdot f = \llbracket h \rrbracket \\ \Leftarrow & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\ & g \cdot f = (id + f) \cdot h \\ & \square \end{aligned}$$

7. Um mónade é um functor $\mathbb{T}$ equipado com duas funções μ e u , *A monad is a functor $\mathbb{T}$ equipped with two functions μ and u*

$$A \xrightarrow{u} \mathbb{T} A \xleftarrow{\mu} \mathbb{T} (\mathbb{T} A) \quad (F9)$$

que satisfazem as propriedades

satisfying

$$\mu \cdot u = id = \mu \cdot \mathbb{T} u \quad (F10)$$

$$\mu \cdot \mu = \mu \cdot \mathbb{T} \mu \quad (F11)$$

para além das respectivas propriedades “grátis”, onde $\mathbb{T}^2 f$ abrevia $\mathbb{T} (\mathbb{T} f)$:

in addition to their “free” properties, where $\mathbb{T}^2 f$ abbreviates $\mathbb{T} (\mathbb{T} f)$:

$$\mathbb{T} f \cdot u = u \cdot f \quad (F12)$$

$$\mathbb{T} f \cdot \mu = \mu \cdot \mathbb{T}^2 f \quad (F13)$$

Partindo da definição

Starting from the definition of monadic composition,

$$f \bullet g = \mu \cdot \mathbb{T} f \cdot g \quad (F14)$$

de *composição monádica*, demonstre os factos seguintes:

prove the following facts:

$$\mu = id \bullet id \quad (F15)$$

$$f \bullet u = f \wedge f = u \bullet f \quad (F16)$$

$$(f \cdot g) \bullet h = f \bullet (\mathbb{T} g \cdot h) \quad (F17)$$

$$\mathbb{T} f = (u \cdot f) \bullet id \quad (F18)$$