# Cálculo de Programas
# *Algebra of Programming*

UNIVERSIDADE DO MINHO
Lic. em Engenharia Informática (3º ano)
Lic. Ciências da Computação (2º ano)

2023/24 - Ficha *( Exercise sheet )* nr. 9

1. A igualdade que se segue / *The following equality*

$$f \cdot \mathsf{length} = (\![ [\mathsf{zero}\ , (2+) \cdot \pi_2] ]\!)$$

verifica-se para $f = (2*)$ ou $f = (2+)$? Use a lei de fusão-cata para justificar, por cálculo, a sua resposta.

*holds for $f = (2*)$ or $f = (2+)$? Use the cata-fusion law to justify, by calculation, your answer.*

---

2. Considere o seguinte inventário de quatro tipos de árvores:

*Consider the following inventory of four types of trees:*

(a) Árvores com informação de tipo $A$ nas folhas *(Trees with data in their leaves)* :

$$\mathsf{T} = \mathsf{LTree}\ A \qquad \begin{cases} \mathsf{F}\ X = A + X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + f^2 \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [\mathit{Leaf}\ , \mathit{Fork}]$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = \mathit{Leaf}\ a \mid \mathit{Fork}\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$

(b) Árvores com informação de tipo $A$ nos nós *(Trees whose data of type $A$ are stored in their nodes)*:

$$\mathsf{T} = \mathsf{BTree}\ A \qquad \begin{cases} \mathsf{F}\ X = 1 + A \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f^2 \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [\underline{\mathit{Empty}}\ , \mathit{Node}]$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{BTree}\ a = \mathit{Empty} \mid \mathit{Node}\ (a, (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a))$

(c) Árvores com informação nos nós e nas folhas *(Full trees — data in both leaves and nodes)*:

$$\mathsf{T} = \mathsf{FTree}\ B\ A \qquad \begin{cases} \mathsf{F}\ X = B + A \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f^2 \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [\mathit{Unit}\ , \mathit{Comp}]$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{FTree}\ b\ a = \mathit{Unit}\ b \mid \mathit{Comp}\ (a, (\mathsf{FTree}\ b\ a, \mathsf{FTree}\ b\ a))$

(d) Árvores de expressão *(Expression trees)*:

$$\mathsf{T} = \mathsf{Expr}\ V\ O \qquad \begin{cases} \mathsf{F}\ X = V + O \times X^* \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times \mathsf{map}\ f \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [\mathit{Var}\ , \mathit{Term}]$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{Expr}\ v\ o = \mathit{Var}\ v \mid \mathit{Term}\ (o, [\mathsf{Expr}\ v\ o])$

Defina o gene $g$ para cada um dos catamorfismos seguintes desenhando, para cada caso, o diagrama correspondente:

- $maximum = (\!| g |\!)$ — devolve a maior folha de uma árvore de tipo (2a).
- $inorder = (\!| g |\!)$ — faz a travessia inorder de uma árvore de tipo (2b).
- $mirror = (\!| g |\!)$ — espelha uma árvore de tipo (2b), i.e., roda-a de 180º.
- $rep\ a = (\!| g |\!)$ — substitui todas as folhas de uma árvore de tipo (2a) por um mesmo valor $a \in A$.
- $convert = (\!| g |\!)$ — converte árvores de tipo (2c) em árvores de tipo (2b) eliminando os $B$s que estão na primeira.
- $vars = (\!| g |\!)$ — lista as variáveis de uma árvore expressão de tipo (2d).

*Define the "gene" $g$ for each of the following catamorphisms by drawing, for each case, the corresponding diagram:*

- $maximum = (\!| g |\!)$ *— returns the largest leaf of a tree of type (2a).*
- $inorder = (\!| g |\!)$ *— performs a traversal of a type tree (2b).*
- $mirror = (\!| g |\!)$ *— mirrors a tree of type (2b), i.e., rotates it 180º.*
- $rep\ a = (\!| g |\!)$ *— replaces all leaves of a tree of type (2a) by the same value $a \in A$.*
- $convert = (\!| g |\!)$ *— converts trees of type (2c) into trees of type (2b) eliminating the $B$s that can be found in the first.*
- $vars = (\!| g |\!)$ *— lists the variables of an expression tree of type (2d).*

---

3. Mostre por fusão-cata que a propriedade genérica

*Show by cata-fusion that the following generic property of catamorphisms*

$$(\!| g |\!) \cdot (\!| \mathsf{in} \cdot k |\!) = (\!| g \cdot m |\!) \tag{F1}$$

se verifica desde que

*holds wherever*

$$m \cdot \mathsf{F}\, f = \mathsf{F}\, f \cdot k \tag{F2}$$

se verifique também, para qualquer $f$.

*also holds, for any $f$.*

---

4. Seja definido o catamorfismo

*Let the following catamorphism be defined,*

$$mirror = (\!| \mathsf{in} \cdot (id + \mathsf{swap}) |\!)$$

que espelha árvores de tipo LTree. (a) Mostre que $k = m = (id + \mathsf{swap})$ satisfazem a condição (F2) da questão anterior; (b) Mostre que

*which mirrors trees of type* LTree. *(a) Show that $k = m = (id + \mathsf{swap})$ satisfy the condition (F2) of the previous question; (b) Show that*

$$mirror \cdot mirror = id$$

resulta da correspondente aplicação de (F1).

*result of the corresponding application of (F1).*

---

5. Derive a versão *pointwise* do seguinte catamorfismo de BTrees,

*Derive the* pointwise *version of the following catamorphism of* BTree*s*

$$\begin{array}{l} tar = (\!| [\mathsf{singl} \cdot \mathsf{nil}\ , g] |\!)\ \mathbf{where} \\ \quad g = \mathsf{map\ cons} \cdot lstr \cdot (id \times \mathsf{conc}) \\ \quad lstr\ (b, x) = [(b, a) \mid a \leftarrow x] \end{array}$$

entregando no final uma versão da função em que não ocorrem os nomes das funções map, cons, singl, nil, conc e $lstr$. Pode usar map $f\ x = [f\ a \mid a \leftarrow x]$ como definição *pointwise* de map em listas.

*eventually delivering a version of the function in which the function names* map, cons, singl, nil, conc *do not occur. and* $lstr$. *You can use* map $f\ x = [f\ a \mid a \leftarrow x]$ *as* pointwise *definition of* map *in lists.*

---

6. Converta o catamorfismo $vars$ do exercício 2 numa função em Haskell sem quaisquer combinadores *pointfree*.

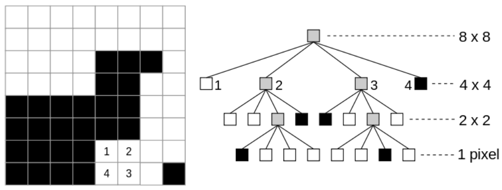
*Unfold catamorphism* $vars$ *(exercise 2) towards a function in Haskell without any pointfree combinator.*

---

7. **Questão prática** — Este problema não irá ser abordado em sala de aula. Os alunos devem tentar resolvê-lo em casa e, querendo, publicarem a sua solução no canal **#geral** do Slack, com vista à sua discussão com colegas.
Dão-se a seguir os requisitos do problema.

***Open assignment*** *— This assignment will not be addressed in class. Students should try to solve it at home and, whishing so, publish their solutions in the* ***#geral*** *Slack channel, so as to trigger discussion among other colleagues.*
*The requirements of the problem are given below.*

***Problem requirements****: The figure below*




*(Source: Wikipedia) shows how an image (in this case in black and white) is represented in the form of a quaternary tree (vulg.* quadtree*) by successive divisions of the 2D space into four regions, until reaching the resolution of one pixel.*
*Let the following Haskell definition of a* quadtree *be given, for a given type* $Pixel$ *predefined:*

$$\textbf{data}\ \mathsf{QTree} = Pixel \mid Blocks\ (\mathsf{QTree})\ (\mathsf{QTree})\ (\mathsf{QTree})\ (\mathsf{QTree})$$

*Having chosen for this type the base functor*

$$\mathsf{F}\ Y = Pixel + Y^2 \times Y^2 \tag{F3}$$

*where* $Y^2$ *abbreviates* $Y \times Y$*, as usual, define the usual construction and decomposition functions of this type, cf.:*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{QTree} \arrow[r, bend left, "\mathsf{out}_{\mathsf{QTree}}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathsf{F}\ (\mathsf{QTree}) \arrow[l, bend left, "\mathsf{in}_{\mathsf{QTree}}"] \end{tikzcd}$$

*Then, write the Haskell code of Quad.hs, a Haskell library similar to others already available, e.g. LTree.hs. Finally, implement as a* QTree *catamorphism the operation that rotates an image 90º clockwise.*
□