Cálculo de Programas
Algebra of Programming

UNIVERSIDADE DO MINHO
Lic. em Engenharia Informática (3º ano)
Lic. Ciências da Computação (2º ano)

2022/23 - Ficha *(Exercise sheet)* nr. 7

1. Os diagramas seguintes representam as **propriedades universais** que definem o combinador **catamorfismo** para dois tipos de dados — números naturais $\mathbb{N}_0$ à esquerda e listas finitas A^* à direita, onde $\widehat{f}$ abrevia $\mathsf{uncurry}\, f$.

   The following diagrams depict the ***universal properties*** *that define the* ***catamorphism*** *combinator for two data types — natural numbers $\mathbb{N}_0$ (on the left) and finite lists A^* (on the right), where $\widehat{f}$ abbreviates* $\mathsf{uncurry}\, f$*:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}_0 \arrow[d, "(\!| g |\!)"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "id + (\!| g |\!)"] \\ B & 1 + B \arrow[l, "g"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A^* \arrow[d, "(\!| g |\!)"'] & 1 + A \times A^* \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "id + id \times (\!| g |\!)"] \\ B & 1 + A \times B \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{in} = [\mathsf{zero}\,, \mathsf{succ}] \\ \mathsf{zero}\ \_ = 0 \\ \mathsf{succ}\ n = n + 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\,, \mathsf{cons}] \\ \mathsf{nil}\ \_ = [\,] \\ \mathsf{cons}\ (a, x) = a : x \end{array} \right.$$

$$k = (\!| g |\!) \ \equiv\ k \cdot \mathsf{in} = g \cdot (id + k) \qquad k = (\!| g |\!) \ \equiv\ k \cdot \mathsf{in} = g \cdot (id + id \times k)$$

$$\mathsf{for}\ b\ i = (\!| [\underline{i}\,, b] |\!) \qquad \mathsf{foldr}\ f\ u = (\!| [\underline{u}\,, \widehat{f}] |\!)$$

   Tendo em conta o diagrama da esquerda codifique — recorrendo à biblioteca Cp.hs e à definição de out feita numa ficha anterior — o combinador:

   Concerning the diagram on the left, encode — using the Cp.hs library and the definition of out *calculated in a previous sheet — the combinator:*

$$(\!| g |\!) = g \cdot (id + (\!| g |\!)) \cdot \mathsf{out} \tag{F1}$$

   De seguida implemente e teste a seguinte função:

   Then implement and test de following function:

$$rep\ a = (\!| [\mathsf{nil}\,, (a{:})] |\!) \tag{F2}$$

   (O que faz ela?) Finalmente, codifique

   (What is its purpose?) Finally, encode

$$f = \pi_2 \cdot aux \ \mathbf{where}\ aux = \mathsf{for}\ \langle \mathsf{succ} \cdot \pi_1, \mathsf{mul} \rangle\ (1, 1) \tag{F3}$$

   e inspecione o seu comportamento. Que função f é essa?

   and inspect its behavior. Which function is f?

2. Identifique como catamorfismos de listas ($k = (\!| g |\!)$) as funções seguintes, indicando o gene g para cada caso (apoie a sua resolução com diagramas):

   (a) k é a função que multiplica todos os elementos de uma lista.

   (b) $k = \mathsf{reverse}$

   (c) $k = concat$

   (d) k é a função $\mathsf{map}\ f$, para um dado $f : A \to B$.

   (e) k é a função que calcula o máximo de uma lista de números naturais ($\mathbb{N}_0{}^*$).

   (f) $k = \mathsf{filter}\ p$ onde:

Identify as list catamorphisms ($k = (\!| g |\!)$) the following functions, indicating the corresponding gene g for each case (support your answer with diagrams):

   (a) k is the function that multiplies all elements of a list.

   (b) $k = \mathsf{reverse}$

   (c) $k = concat$

   (d) k is the function $\mathsf{map}\ f$, for a given $f : A \to B$.

   (e) k is the function that calculates the maximum of a list of natural numbers ($\mathbb{N}_0{}^*$).

   (f) $k = \mathsf{filter}\ p$ where:

$$\begin{array}{l}\mathsf{filter}\ p\ [\,] = [\,]\\ \mathsf{filter}\ p\ (h : t) = x + \!\! + \ \mathsf{filter}\ p\ t\ \mathbf{where}\ x = \mathbf{if}\ (p\ h)\ \mathbf{then}\ [h]\ \mathbf{else}\ [\,]\end{array}$$

---

3. A função seguinte, em Haskell

The following function, in Haskell

$$\begin{array}{l} sumprod\ a\ [\,] = 0\\ sumprod\ a\ (h : t) = a * h + sumprod\ a\ t\end{array}$$

é o catamorfismo de listas

is the list-catamorphism

$$sumprod\ a \quad = \quad (\!| [\mathsf{zero}\ , \mathsf{add} \cdot ((a*) \times id)] |\!) \tag{F4}$$

onde $\mathsf{zero} = \underline{0}$ e $\mathsf{add}\ (x, y) = x + y$. Como exemplo de aplicação da propriedade de **fusão-cata** para listas, demonstre a igualdade

*where $\mathsf{zero} = \underline{0}$ and $\mathsf{add}\ (x, y) = x + y$. As an example of application of **cata-fusion**, prove the equality*

$$sumprod\ a \quad = \quad (a*) \cdot \mathsf{sum} \tag{F5}$$

onde $\mathsf{sum} = (\!| [\mathsf{zero}\ , \mathsf{add}] |\!)$. **NB:** não ignore propriedades elementares da aritmética que lhe possam ser úteis.

*where $\mathsf{sum} = (\!| [\mathsf{zero}\ , \mathsf{add}] |\!)$. **NB:** take into account elementary arithmetic properties that may be useful.*

---

4. A função $\mathsf{foldr}\ \overline{\pi_2}\ i$ é necessariamente uma função constante. Qual? Justifique com o respectivo cálculo.

Function $\mathsf{foldr}\ \overline{\pi_2}\ i$ is a constant function, for any i – which constant function? Write down your calculations.

---

5. Considere o functor

Consider functor

$$\left\{\begin{array}{l}\mathsf{T}\ X = X \times X\\ \mathsf{T}\ f = f \times f\end{array}\right.$$

e as funções

and functions

$$\mu = \pi_1 \times \pi_2$$
$$u = \langle id, id \rangle.$$

Demonstre a propriedade: *Prove the following property:*

$$\mu \cdot \mathsf{T}\ u = id = \mu \cdot u$$

---

6. Sejam dados os functores elementares seguintes: *Consider the following basic functors:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = \mathbb{Z} \\ \mathsf{F}\ f = id \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{G}\ X = X \\ \mathsf{G}\ f = f \end{array} \right.$$

Mostre que H e K definidos por *Show that* H *and* K *defined by*

$$\mathsf{H}\ X = \mathsf{F}\ X + \mathsf{G}\ X$$
$$\mathsf{K}\ X = \mathsf{G}\ X \times \mathsf{F}\ X$$

são functores. *are functors.*

---

7. Mostre por fusão-cata que a propriedade genérica *Show by cata-fusion that the following generic property of catamorphisms*

$$(\!|\, g \,|\!) \cdot (\!|\, \mathsf{in} \cdot k \,|\!) = (\!|\, g \cdot m \,|\!)$$

se verifica desde que *holds wherever*

$$m \cdot \mathsf{F}\ f = \mathsf{F}\ f \cdot k \tag{F6}$$

se verifique também, para qualquer f. *also holds, for any f.*