

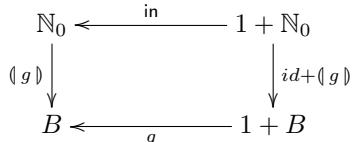
Cálculo de Programas

Algebra of Programming

UNIVERSIDADE DO MINHO
 Lic. em Engenharia Informática (3º ano)
 Lic. Ciências da Computação (2º ano)

2022/23 - Ficha (*Exercise sheet*) nr. 7

1. Os diagramas seguintes representam as **propriedades universais** que definem o combinador **catamorfismo** para dois tipos de dados — números naturais \mathbb{N}_0 à esquerda e listas finitas A^* à direita, onde \widehat{f} abrevia $\text{uncurry } f$.



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{in} = [\text{zero}, \text{succ}] \\ \text{zero} = 0 \\ \text{succ } n = n + 1 \end{array} \right.$$

$$k = \langle g \rangle \equiv k \cdot \text{in} = g \cdot (id + k) \\ \text{for } b \ i = \langle [i, b] \rangle$$

Tendo em conta o diagrama da esquerda codifique — recorrendo à biblioteca Cp.hs e à definição de out feita numa ficha anterior — o combinador:

$$\langle g \rangle = g \cdot (id + \langle g \rangle) \cdot \text{out} \quad (\text{F1})$$

De seguida implemente e teste a seguinte função:

$$\text{rep } a = \langle [\text{nil}, (a:)] \rangle \quad (\text{F2})$$

(O que faz ela?) Finalmente, codifique

Then implement and test de following function:

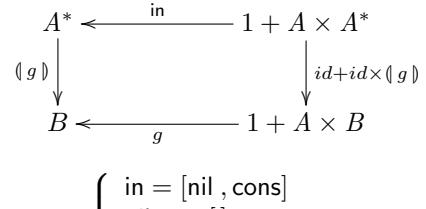
(What is its purpose?) Finally, encode

$$f = \pi_2 \cdot \text{aux} \text{ where } \text{aux} = \text{for } \langle \text{succ} \cdot \pi_1, \text{mul} \rangle (1, 1) \quad (\text{F3})$$

e inspecione o seu comportamento. Que função f é essa?

and inspect its behavior. Which function is f ?

*The following diagrams depict the **universal properties** that define the **catamorphism** combinator for two data types — natural numbers \mathbb{N}_0 (on the left) and finite lists A^* (on the right), where \widehat{f} abbreviates $\text{uncurry } f$:*



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{in} = [\text{nil}, \text{cons}] \\ \text{nil} = [] \\ \text{cons } (a, x) = a : x \end{array} \right.$$

$$k = \langle g \rangle \equiv k \cdot \text{in} = g \cdot (id + id \times k) \\ \text{foldr } f u = \langle [u, \widehat{f}] \rangle$$

Concerning the diagram on the left, encode — using the Cp.hs library and the definition of out calculated in a previous sheet — the combinator:

2. Identifique como catamorfismos de listas ($k = \langle\langle g \rangle\rangle$) as funções seguintes, indicando o gene g para cada caso (apoie a sua resolução com diagramas):

- (a) k é a função que multiplica todos os elementos de uma lista.
- (b) $k = \text{reverse}$
- (c) $k = \text{concat}$
- (d) k é a função map f , para um dado $f : A \rightarrow B$.
- (e) k é a função que calcula o máximo de uma lista de números naturais (\mathbb{N}_0^*).
- (f) $k = \text{filter } p$ onde:

$\text{filter } p [] = []$

$\text{filter } p (h : t) = x \uparrow\downarrow \text{filter } p t \text{ where } x = \text{if } (p h) \text{ then } [h] \text{ else } []$

Identify as list catamorphisms ($k = \langle\langle g \rangle\rangle$) the following functions, indicating the corresponding gene g for each case (support your answer with diagrams):

- (a) k is the function that multiplies all elements of a list.
- (b) $k = \text{reverse}$
- (c) $k = \text{concat}$
- (d) k is the function map f , for a given $f : A \rightarrow B$.
- (e) k is the function that calculates the maximum of a list of natural numbers (\mathbb{N}_0^*).
- (f) $k = \text{filter } p$ where:

3. A função seguinte, em Haskell

The following function, in Haskell

$$\text{sumprod } a [] = 0$$

$$\text{sumprod } a (h : t) = a * h + \text{sumprod } a t$$

é o catamorfismo de listas

is the list-catamorphism

$$\text{sumprod } a = \langle\langle [\text{zero}, \text{add} \cdot ((a*) \times \text{id})] \rangle\rangle \quad (\text{F4})$$

onde $\text{zero} = \underline{0}$ e $\text{add } (x, y) = x + y$. Como exemplo de aplicação da propriedade de **fusão-cata** para listas, demonstre a igualdade

*where $\text{zero} = \underline{0}$ and $\text{add } (x, y) = x + y$. As an example of application of **cata-fusion**, prove the equality*

$$\text{sumprod } a = (a*) \cdot \text{sum} \quad (\text{F5})$$

onde $\text{sum} = \langle\langle [\text{zero}, \text{add}] \rangle\rangle$. **NB:** não ignore propriedades elementares da aritmética que lhe possam ser úteis.

*where $\text{sum} = \langle\langle [\text{zero}, \text{add}] \rangle\rangle$. **NB:** take into account elementary arithmetic properties that may be useful.*

4. A função $\text{foldr } \pi_2 i$ é necessariamente uma função constante. Qual? Justifique com o respectivo cálculo.

Function $\text{foldr } \pi_2 i$ is a constant function, for any i – which constant function? Write down your calculations.

5. Considere o functor

Consider functor

$$\begin{cases} \top X = X \times X \\ \top f = f \times f \end{cases}$$

e as funções

and functions

$$\begin{aligned}\mu &= \pi_1 \times \pi_2 \\ u &= \langle id, id \rangle.\end{aligned}$$

Demonstre a propriedade:

Prove the following property:

$$\mu \cdot T\ u = id = \mu \cdot u$$

6. Sejam dados os functores elementares seguintes:

$$\begin{cases} F\ X = \mathbb{Z} \\ F\ f = id \end{cases} \quad \begin{cases} G\ X = X \\ G\ f = f \end{cases}$$

Mostre que H e K definidos por

Consider the following basic functors:

Show that H and K defined by

$$\begin{aligned}H\ X &= F\ X + G\ X \\ K\ X &= G\ X \times F\ X\end{aligned}$$

são functores.

are functors.

7. Mostre por fusão-cata que a propriedade genérica

Show by cata-fusion that the following generic property of catamorphisms

$$(g) \cdot (\text{in} \cdot k) = (g \cdot m)$$

se verifica desde que

holds wherever

$$m \cdot F\ f = F\ f \cdot k \tag{F6}$$

se verifique também, para qualquer f .

also holds, for any f .