Cálculo de Programas
Algebra of Programming

UNIVERSIDADE DO MINHO
Lic. em Engenharia Informática (3º ano)
Lic. Ciências da Computação (2º ano)

2022/23 - Ficha *(Exercise sheet)* nr. 5

1. Considere a função

Let

$$\alpha = \mathsf{swap} \cdot (id \times \mathsf{swap})$$

Calcule o tipo mais geral de α e formule a sua propriedade natural (grátis) a inferir através de um diagrama, como se explicou na aula teórica.

be given. Infer the most general type of α and the associated natural ("free") property using a diagram, as shown in the theory class.

---

2. Recorde as seguintes funções elementares que respectivamente juntam ou duplicam informação:

Recall the following basic functions that respectively gather or duplicate information:

$$join = [id\ , id] \tag{F1}$$
$$dup = \langle id, id \rangle \tag{F2}$$

Calcule (justificando) a propriedade grátis da função $\alpha = dup \cdot join$ e indique por que razão não pode calcular essa propriedade para $join \cdot dup$.

Calculate (justifying) the free property of the function $\alpha = dup \cdot join$ and indicate why you cannot calculate this property for $join \cdot dup$.

---

3. Considere a função

Assuming $join$ defined above (F1), consider

$$\mathsf{iso} = \langle ! + !, join \rangle$$

onde $join$ está definida acima (F1) e $! : A \to 1$ designa a única função (constante) que habita o tipo $A \to 1$, habitualmente designada por *"bang"*.
Após identificar o isomorfismo que ela testemunha, derive a partir do correspondente diagrama a propriedade (dita *grátis*) de iso:

where $! : A \to 1$ is the "bang"function (the unique polymorphic constant function of its type).
After identifying the isomorphism witnessed by iso, *derive its free (natural) property using a diagram:*

$$(id \times f) \cdot \mathsf{iso} \quad = \quad \mathsf{iso} \cdot (f + f) \tag{F3}$$

De seguida confirme, por cálculo analítico, essa propriedade. Finalmente, derive uma definição de iso em Haskell *pointwise* sem recurso a combinadores.

As a way of confirming (F3), give an analytic proof of this result. Finally, derive a pointwise definition of iso.

---

4. Seja dada uma função ∇ da qual só sabe duas propriedades: $\nabla \cdot i_1 = id$ e $\nabla \cdot i_2 = id$. Mostre que, necessariamente, ∇ satisfaz também a propriedade natural

   Suppose that, about a function ∇, you only know two properties: $\nabla \cdot i_1 = id$ and $\nabla \cdot i_2 = id$. Show that, necessarily, ∇ also satisfies the natural property

$$f \cdot \nabla = \nabla \cdot (f + f) \tag{F4}$$

---

5. Seja dada uma função α cuja propriedade grátis é:

   Let α be a polymorphic function with free property:

$$(f + h) \cdot \alpha \quad = \quad \alpha \cdot (f + g \times h) \tag{F5}$$

   Será esta propriedade suficiente para deduzir a definição de α? Justifique analiticamente.

   Can a definition of α be inferred from (F5)? Justify.

---

6. O formulário inclui as duas equivalências seguintes, válidas para qualquer isomorfismo $alpa$:

   Any isomorphism α satisfies the following equivalences (also given in the reference sheet),

$$\alpha \cdot g = h \;\equiv\; g = \alpha^{\circ} \cdot h \tag{F6}$$
$$g \cdot \alpha = h \;\equiv\; g = h \cdot \alpha^{\circ} \tag{F7}$$

   Recorra a essas propriedades para mostrar que a igualdade

   which can be useful to show that the equality

$$h \cdot \mathsf{distr} \cdot (g \times (id + \alpha)) = k$$

   é equivalente à igualdade

   is equivalent to:

$$h \cdot (g \times id + g \times \alpha) = k \cdot \mathsf{undistr}$$

   (**Sugestão:** não ignore a propriedade natural (i.e. *grátis*) do isomorfismo distr.)

   *Prove this equivalenvce. (**Hint:** the free-property of* distr *shoudn't be ingored in the reasoning.)*

---

7. Considere o combinador $comb\ \ f$ definido por

   Let $comb\ f$ be a combinator defined by:

$$comb\ f = [id\ , f] \cdot (i_1 + i_2) \cdot f \tag{F8}$$

   Mostre que o tipo mais geral de $comb$ é

   Show that its most general type is

$$comb : (C + B)^{A+B} \to (C + B)^{A+B}$$

   e demonstre analiticamente que:

   and prove that:

$$comb\ id = id$$