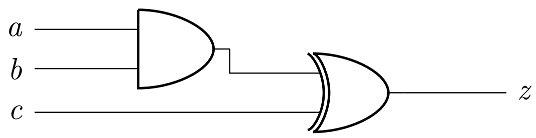
Cálculo de Programas

Lic. em Engenharia Informática (3º ano)
Lic. Ciências da Computação (2º ano)
UNIVERSIDADE DO MINHO

2022/23 - Ficha nr.º 2

1. Considere o circuito booleano



que calcula a função $f\ ((a, b), c) = (a \wedge b) \oplus c$, onde $\oplus$ é a operação "exclusive-or".

- Escreva uma definição dessa função $(\mathbb{B} \times \mathbb{B}) \times \mathbb{B} \xrightarrow{f} \mathbb{B}$ que não recorra às variáveis a, b ou c[1] e desenhe o respectivo diagrama. (**Sugestão**: recorde a função $\mathsf{uncurry}$ da ficha anterior.)
- Qual é o tipo da função $g = \langle \pi_1, f \rangle$?

2. Recorde as propriedade universal do combinador $\langle f, g \rangle$,

$$k = \langle f, g \rangle \quad \equiv \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{array} \right.$$

da qual, como se disse na aula teórica, podem ser derivadas todas as outras que aparecem no respectivo grupo, no formulário. Use-a para demonstrar a lei

$$\langle h, k \rangle \cdot f = \langle h \cdot f, k \cdot f \rangle$$

que também consta desse formulário sob a designação *fusão*-$\times$.

3. O combinador

$$\begin{array}{l} \mathsf{const} :: a \to b \to a \\ \mathsf{const}\ a\ b = a \end{array}$$

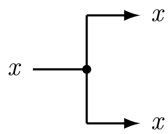
está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos $\mathsf{const}\ k$ por $\underline{k}$, qualquer que seja k. Demonstre a igualdade

$$\underline{(b, a)} = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \tag{F1}$$

a partir da propriedade universal do produto e das propriedades das funções constantes que constam do formulário.

[1] Definições de funções que recorrem a variáveis dizem-se "*pointwise*"; as correspondentes versões sem variáveis dizem-se "*point-free*".

4. Uma das operações essenciais em processamento da informação é a sua *duplicação*:



$$dup\ x = (x, x)$$

Recorra à lei de fusão-$\times$ para demonstrar a seguinte propriedade da duplicação de informação:

$$dup \cdot f = \langle f, f \rangle \tag{F2}$$

5. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} (A \times B) \times C \arrow[rr, bend left, "\mathsf{assocr}"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & A \times (B \times C) \arrow[ll, bend left, "\mathsf{assocl}"] \end{tikzcd}$$

onde $\mathsf{assocl} = \langle id \times \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle$. Apresente justificações para o cálculo que se segue em que se resolve em ordem a assocr a equação $\mathsf{assocl} \cdot \mathsf{assocr} = id$:

$$\begin{array}{ll}
& \mathsf{assocl} \cdot \mathsf{assocr} = id \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} (id \times \pi_1) \cdot \mathsf{assocr} = \pi_1 \\ \pi_2 \cdot \pi_2 \cdot \mathsf{assocr} = \pi_2 \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot \mathsf{assocr} = \pi_1 \cdot \pi_1 \\ \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \mathsf{assocr} = \pi_2 \cdot \pi_1 \end{array} \right. \\ \pi_2 \cdot \pi_2 \cdot \mathsf{assocr} = \pi_2 \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot \mathsf{assocr} = \pi_1 \cdot \pi_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \mathsf{assocr} = \pi_2 \cdot \pi_1 \\ \pi_2 \cdot \pi_2 \cdot \mathsf{assocr} = \pi_2 \end{array} \right. \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot \mathsf{assocr} = \pi_1 \cdot \pi_1 \\ \pi_2 \cdot \mathsf{assocr} = \langle \pi_2 \cdot \pi_1, \pi_2 \rangle \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathsf{assocr} = \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_2 \times id \rangle
\end{array}$$

6. Sabendo que uma dada função xr satisfaz a propriedade

$$\mathsf{xr} \cdot \langle \langle f, g \rangle, h \rangle = \langle \langle f, h \rangle, g \rangle \tag{F3}$$

para todo o f, g e h, derivar de (F3) a definição de xr:

$$\mathsf{xr} = \langle \pi_1 \times id, \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle \tag{F4}$$