Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2022/23

Teste — 2 de Junho de 2023, 10h00–12h00
Salas E1-0.04 + E1-0.20

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de* ***8*** *questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

Questão 1 Recorde o isomorfismo

$$
\begin{tikzcd}
Maybe\ B \arrow[r, bend left, "\mathsf{out} = \mathsf{in}^{\circ}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & 1 + B \arrow[l, bend left, "\mathsf{in} = [\underline{\mathsf{Nothing}}\,, \mathsf{Just}]"]
\end{tikzcd}
$$

e considere a função:

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{fromMaybe} :: a \to Maybe\ a \to a \\
\mathsf{fromMaybe}\ a = [\underline{a}\,, id] \cdot \mathsf{out}
\end{array}
$$

Derive a versão *pointwise* de fromMaybe por forma a não recorrer ao combinador de alternativa (vulg. 'either') de funções.

RESOLUÇÃO: Tem-se (justificar os passos com reticências):

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathsf{fromMaybe}\ a = [\underline{a}\,, id] \cdot \mathsf{out} \\
\equiv & \quad \{\ \mathsf{in}\ /\ \mathsf{out};\ inMaybe\ \} \\
 & \mathsf{fromMaybe}\ a \cdot [\underline{\mathsf{Nothing}}\,, \mathsf{Just}] = [\underline{a}\,, id] \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{fromMaybe}\ a \cdot \underline{\mathsf{Nothing}} = \underline{a} \\ \mathsf{fromMaybe}\ a \cdot \mathsf{Just} = id \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{fromMaybe}\ a\ \mathsf{Nothing} = a \\ \mathsf{fromMaybe}\ a\ (\mathsf{Just}\ a') = a' \end{array} \right.
\end{array}
$$

$\square$

Questão 2 Suponha que apenas sabe a seguinte propriedade de uma dada função α,

$$\alpha \cdot \langle f, \langle g, h\rangle\rangle = \langle h, f\rangle \tag{E1}$$

válida para quaisquer f, g e h que a tipem correctamente.

Deduza a definição de α e, a partir do seu tipo mais geral, a respectiva propriedade *natural* (também chamada *grátis*) usando o habitual diagrama.

RESOLUÇÃO: A propriedade dar-nos-á uma definição de α desde que consigamos anular o termo $\langle f, \langle g, h\rangle\rangle$ em (E1), ou seja, reduzi-lo à identidade:

$$
\begin{array}{cl}
 & \langle f, \langle g, h\rangle\rangle = id \\
\equiv & \qquad \{ \text{ universal-}\times \text{ ou reflexão-}\times \text{ seguida de eq-}\times \text{ } \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} f = \pi_1 \\ \langle g, h\rangle = \pi_2 \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \text{ universal-}\times \text{ } \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} f = \pi_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} g = \pi_1 \cdot \pi_2 \\ h = \pi_2 \cdot \pi_2 \end{array} \right. \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

Logo, voltando a (E1) :

$$
\begin{array}{cl}
 & \alpha \cdot id = \langle \pi_2 \cdot \pi_2, \pi_1\rangle \\
\equiv & \qquad \{ \text{ natural-id } \} \\
 & \alpha = \langle \pi_2 \cdot \pi_2, \pi_1\rangle
\end{array}
$$

Logo α tem tipo $B \times C \leftarrow C \times (A \times B)$ de que decorre, fazendo o diagrama habitual, a propriedade grátis

$$\alpha \cdot (h \times (f \times g)) = (g \times h) \cdot \alpha$$

$\Box$

Questão 3 Considere a função:

$$x \ominus y = \textbf{if } x \leqslant y \textbf{ then } 0 \textbf{ else } 1 + x \ominus (y + 1)$$

Use o condicional de McCarthy para identificar o gene de $\widehat{\ominus} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ escrita como um anamorfismo de naturais, fazendo o respectivo diagrama.

RESOLUÇÃO: Parte-se de $\widehat{\ominus}\ (x, y) = \textbf{if } x \leqslant y \textbf{ then } 0 \textbf{ else } 1 + \widehat{\ominus}\ (x, y + 1)$. Diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\widehat{\ominus}"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \arrow[d, "id + \widehat{\ominus}"'] \\
\mathbb{N}_0 & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathsf{in}"]
\end{tikzcd}
$$

Pelo procedimento habitual,[1]

$$g\ (x, y) = \textbf{if } x \leqslant y \textbf{ then } i_1\ () \textbf{ else } i_2\ (x, y + 1)$$

[1] Ver e.g. vídeo T9b, t=3.55 etc.

Passando a *pointfree*, introduz-se o condicional,:

$$g = \widehat{(\leqslant)} \to i_1 \cdot !, i_2 \cdot (id \times \mathsf{succ})$$

ou seja:

$$g = \widehat{(\leqslant)} \to (! + id \times \mathsf{succ})$$

$\square$

Questão 4 Considere o combinador $comb\ f$ definido por:

$$comb\ f = [id, f] \cdot (i_1 + i_2) \cdot f \tag{E2}$$

Mostre que o tipo mais geral de $comb$ é

$$comb : (C + B)^{A+B} \to (C + B)^{A+B}$$

e demonstre analiticamente que

$$comb\ id = id$$

Resolução: Por absorção, $comb\ f = [i_1, f \cdot i_2] \cdot f$. Tipos iniciais:

$$f : X \to Z$$
$$i_2 : B \to A + B$$
$$i_1 : C \to C + D$$

Por $[i_1, f \cdot i_2]$ a saída de f tem de ser $C + D$ e a sua entrada tem de ser $A + B$. Logo tem-se

$f : A + B \to C + D$.

Mas o segundo f terá que ter saída $C + B$. Logo $D = B$ e $f : A + B \to C + B$.

O tipo de $comb\ f$ é o mesmo que o de f, pois a sua entrada e saída coincidem com as de f.

Finalmente, $comb\ id = [i_1, id \cdot i_2] \cdot id = [i_1, i_2] = id$ é imediato (apresentar justificações em casa). $\square$

Questão 5 Na estratégia algorítmica conhecida por *Google map-reduce* abordada nas aulas teóricas ocorre o catamorfismo de listas seguinte,

$$invert :: Eq\ a \Rightarrow [(a, String)] \to [(String, [a])]$$
$$invert = (\!|\, [\mathsf{nil}, \widehat{col}] \cdot (id + (conv \cdot (id \times \mathsf{words})) \times id) \,|\!)$$

onde $\mathsf{words} : String \to String^*$ é a função que separa um *string* na lista das suas palavras.

Identifique os tipos X, Y e Z no diagrama abaixo e, assim, os das funções auxiliares $conv$ e col (cuja definição se omite). Justifique a sua resposta.

$$\begin{tikzcd}
(A \times String)^* \arrow[rrr, bend left, "\mathsf{out}=\mathsf{in}^\circ"] \arrow[rrr, phantom, "\cong"] \arrow[d, "invert"'] & & & 1 + (A \times String) \times (A \times String)^* \arrow[lll, bend left, "\mathsf{in}={[\mathsf{singl}, \mathsf{cons}]}"] \arrow[d, "id+id \times invert"] \\
(String \times A^*)^* & & & 1 + (A \times String) \times Z \arrow[dl, "id+(id \times \mathsf{words}) \times id"] \\
& 1 + X \times X \arrow[ul, "{[\mathsf{nil}, \widehat{col}]}"] & 1 + Y \times Z \arrow[l, "id+conv \times id"] &
\end{tikzcd}$$

Resolução: Temos

$$
\begin{array}{l}
X = (String \times A^*)^* \\
Y = A \times String^* \\
Z = X
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
conv : Y \to X \\
col : X \to X \to X
\end{array}
$$

cf:

$$
\begin{tikzcd}
(A \times String)^* \arrow[rr, bend left=10, "\mathsf{out} = conv\ \mathsf{in}"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] \arrow[d, "invert"'] & & 1 + (A \times String) \times (A \times String)^* \arrow[ll, bend left=10, "\mathsf{in} = [\mathsf{singl}\ , \mathsf{cons}]"] \arrow[d, "id + id \times invert"] \\
(String \times A^*)^* & & 1 + (A \times String) \times (String \times A^*)^* \arrow[dl, "id + (id \times \mathsf{words}) \times id"] \\
 & 1 + (A \times String^*) \times (String \times A^*)^* \arrow[d, "id + conv \times id"] & \\
 & 1 + (String \times A^*)^* \times (String \times A^*)^* \arrow[uul, "{[\mathsf{nil}\ , \widehat{col}]}"] &
\end{tikzcd}
$$

□

Questão 6 Considere o catamorfismo $\mathsf{LTree}\ (A \times B) \xrightarrow{unzp} (\mathsf{LTree}\ A) \times (\mathsf{LTree}\ B)$ que divide uma árvore de pares num par de árvores

$$
\begin{array}{l}
unzp = (\!|\, \langle \mathsf{in}_1 \cdot (\mathsf{F}\ \pi_1), \mathsf{in}_2 \cdot (\mathsf{F}\ \pi_2) \rangle \,|\!)\ \textbf{where} \\
\quad \mathsf{in}_1 = \mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (\pi_1, id) \\
\quad \mathsf{in}_2 = \mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (\pi_2, id)
\end{array}
$$

onde, como sabe, $\mathsf{B}\ (f, g) = f + g \times g$. Recorra a uma lei que conhece (e cujo nome é bastante sugestivo) para demonstrar a seguinte propriedade de cancelamento:

$$\pi_1 \cdot unzp \quad = \quad \mathsf{LTree}\ \pi_1 \tag{E3}$$

Resolução: A lei que é sugerida é conhecida por "banana-split". Investigar as justificações que faltam em

$$
\begin{array}{ll}
 & \pi_1 \cdot unzp \\
= & \quad \{\ unzp = (\!|\, \langle \mathsf{in}_1 \cdot (\mathsf{F}\ \pi_1), \mathsf{in}_2 \cdot (\mathsf{F}\ \pi_2) \rangle \,|\!)\ \} \\
 & \pi_1 \cdot (\!|\, \langle \mathsf{in}_1 \cdot (\mathsf{F}\ \pi_1), \mathsf{in}_2 \cdot (\mathsf{F}\ \pi_2) \rangle \,|\!) \\
= & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
 & \pi_1 \cdot \langle (\!|\, \mathsf{in}_1 \,|\!), (\!|\, \mathsf{in}_2 \,|\!) \rangle \\
= & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
 & (\!|\, \mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (\pi_1, id) \,|\!) \\
= & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
 & \mathsf{LTree}\ \pi_1
\end{array}
$$

□

Questão 7 O conceito genérico de catamorfismo $(\!| g |\!)$ gerado pelo gene g é captado pela propriedade universal

$$k = (\!| g |\!) \quad \equiv \quad k \cdot in = g \cdot (\mathsf{F}\, k)$$

Mostre que:

$$(\!| f \cdot g |\!) \quad = \quad f \cdot (\!| g \cdot \mathsf{F}\, f |\!) \tag{E4}$$

RESOLUÇÃO: O termo $f \cdot (\!| g \cdot \mathsf{F}\, f |\!)$ sugere o recurso à fusão-cata:

$$\begin{array}{ll}
 & (\!| f \cdot g |\!) = f \cdot (\!| g \cdot \mathsf{F}\, f |\!) \\
\Leftarrow & \qquad \{ \text{ fusão-cata (atenção ao } \Leftarrow\text{: vamos à procura de uma condição } \textbf{suficiente} \text{ para a fusão se dar) } \} \\
 & f \cdot (g \cdot \mathsf{F}\, f) = (f \cdot g) \cdot \mathsf{F}\, f \\
\equiv & \qquad \{ \text{ composição é associativa } \} \\
 & \text{TRUE}
\end{array}$$

□

Questão 8 Considere, definido em Haskell, o tipo

$\mathbf{data}\ \mathsf{RTree}\ a = Ros\ a\ [\mathsf{RTree}\ a]$

das habitualmente designadas “rose trees”, que tem bifunctor de base $\mathsf{B}\,(X, Y) = X \times Y^*$ e

$\mathsf{in} = \widehat{Ros}$
$\mathsf{out}\ (Ros\ a\ x) = (a, x)$

Considere $fmap\ f$ definida por

$$fmap\ f\ (Ros\ a\ xs) = Ros\ (f\ a)\ (\mathsf{map}\ (fmap\ f)\ xs) \tag{E5}$$

e mostre que $fmap\ f = (\!| g |\!)$ identificando g. Mostre ainda que esse catamorfismo se pode definir como um anamorfismo, calculando-o.

RESOLUÇÃO: Vai ser preciso

$$\mathsf{B}\,(f, g) = f \times \mathsf{map}\ g \tag{E6}$$
$$\mathsf{F}\, f = \mathsf{B}\,(id, g) = id \times \mathsf{map}\ g \tag{E7}$$

Tem-se:[2]

$$\begin{array}{ll}
 & fmap\ f\ (Ros\ a\ xs) = Ros\ (f\ a)\ (\mathsf{map}\ (fmap\ f)\ xs) \\
\equiv & \qquad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}
\end{array}$$

[2]Completar com as justificações.

$$
\begin{aligned}
& \mathit{fmap}\ f\ (\widehat{\mathit{Ros}}\ (a, xs)) = \widehat{\mathit{Ros}} \cdot (f \times \mathsf{map}\ (\mathit{fmap}\ f))\ (a, xs) \\
\equiv \quad & \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& \mathit{fmap}\ f \cdot \widehat{\mathit{Ros}} = \widehat{\mathit{Ros}} \cdot (f \times \mathsf{map}\ (\mathit{fmap}\ f)) \\
\equiv \quad & \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& \mathit{fmap}\ f \cdot \mathsf{in} = \mathsf{in} \cdot (f \times id) \cdot (id \times \mathsf{map}\ (\mathit{fmap}\ f)) \\
\equiv \quad & \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& \mathit{fmap}\ f = (\!|\, \mathsf{in} \cdot (f \times id) \,|\!) \\
& \square
\end{aligned}
$$

2ª parte:

$$
\begin{aligned}
& \mathit{fmap}\ f = (\!|\, \mathsf{in} \cdot (f \times id) \,|\!) \\
\equiv \quad & \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& \mathit{fmap}\ f \cdot \mathsf{in} = \mathsf{in} \cdot (f \times id) \cdot (id \times \mathsf{map}\ (\mathit{fmap}\ f)) \\
\equiv \quad & \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& \mathsf{out} \cdot \mathit{fmap}\ f = (f \times id) \cdot (id \times \mathsf{map}\ (\mathit{fmap}\ f)) \cdot \mathsf{out} \\
\equiv \quad & \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& \mathsf{out} \cdot \mathit{fmap}\ f = (id \times \mathsf{map}\ (\mathit{fmap}\ f)) \cdot (f \times id) \cdot \mathsf{out} \\
\equiv \quad & \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& \mathit{fmap}\ f = [\!(\, (f \times id) \cdot \mathsf{out} \,)\!]
\end{aligned}
$$

$\square$