Cálculo de Programas

3.º Ano de LEI+MiEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2022/23

Exame de Recurso — 3 de Fevereiro de 2023, 14h00–16h00
Salas E2-1.01 + E2-1.05 + E2-1.07

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

Questão 1 Seja dada uma função α cuja propriedade grátis é:

$$(f + h) \cdot \alpha \quad = \quad \alpha \cdot (f + g \times h) \tag{E1}$$

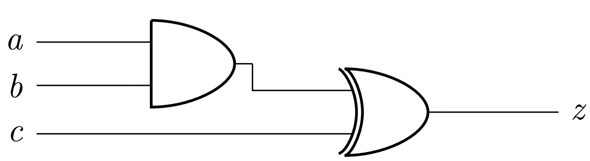
Infira a definição de α a partir de (E1) e verifique analiticamente essa igualdade.

Questão 2 Demonstre a seguinte propriedade do condicional de McCarthy

$$\langle (p \rightarrow f \ , \ h), (p \rightarrow g \ , \ i) \rangle \ = \ p \rightarrow \langle f, g \rangle \ , \ \langle h, i \rangle \tag{E2}$$

sem recorrer à definição $(p \rightarrow f \ , \ g) = [f , g] \cdot p?$.

Questão 3 Recorde das fichas práticas o circuito booleano



a que corresponde a função $f\ ((a, b), c) = (a \wedge b) \oplus c$, onde $\oplus$ é a operação "exclusive-or". Apresente justificações para os seguintes passos que derivam a versão *pointfree* de f:

$$
\begin{array}{ll}
& f\ ((a, b), c) = (a \wedge b) \oplus c \\
\equiv & \qquad \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& f\ ((a, b), c) = (\oplus)\ ((\wedge)\ a\ b)\ c \\
\equiv & \qquad \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& f\ ((a, b), c) = (\oplus)\ (\widehat{\wedge}\ (a, b))\ c
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& f\ ((a,b),c) = ((\oplus)\cdot\widehat{\wedge})\ (a,b)\ c \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& f\ ((a,b),c) = (\widehat{(\oplus)\cdot\widehat{\wedge}})\ ((a,b),c) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& f = \widehat{(\oplus)\cdot\widehat{\wedge}} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \overline{f} = (\oplus)\cdot\widehat{\wedge} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \overline{f} = \overline{\widehat{\oplus}}\cdot\widehat{\wedge} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \overline{f} = \overline{\widehat{\oplus}\cdot(\widehat{\wedge}\times id)} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& f = \widehat{\oplus}\cdot(\widehat{\wedge}\times id)
\end{array}
$$

Questão 4 Complete a seguinte demonstração de que os catamorfismos de listas $f = (\!|\,\underline{k}\,|\!)$ e $g = (\!|\,[\underline{k}\,,\pi_2]\,|\!)$ são a mesma função:

$$
\begin{array}{ll}
& g = f \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (\!|\,[\underline{k}\,,\pi_2]\,|\!) = (\!|\,\underline{k}\,|\!) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (\!|\,[\underline{k}\,,\pi_2]\,|\!)\cdot \mathsf{in} = \ldots.. \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \vdots
\end{array}
$$

Questão 5 Considere-se a função

$$h = \mathsf{for}\ loop\ (1,1) \tag{E3}$$

onde $loop\ (a,b) = (a+2, a+b)$. Sabendo que

$$\mathsf{for}\ g\ i = (\!|\,[\underline{i}\,, g]\,|\!) \tag{E4}$$

e recorrendo à lei de recursividade mútua, deduza as definições *pointwise* das funções f e g tal que $h = \langle f, g\rangle$. Que funções são essas?

Questão 6 A lei de recursividade mútua tem uma versão dual que envolve alternativas e anamorfismos em vez de *splits* e catamorfismos:

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \mathsf{in} \cdot \mathsf{F}\,[f\,,g] \cdot h \\ g = \mathsf{in} \cdot \mathsf{F}\,[f\,,g] \cdot k \end{array} \right. \quad \equiv \quad [f\,,g] = [\!(\,[h\,,k]\,)\!] \tag{E5}$$

Complete a demonstração de (E5) que se segue:

$$\begin{array}{ll} & [f\,,g] = [\!(\,[h\,,k]\,)\!] \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \vdots \\ \Box & \end{array}$$

Questão 7 Considere o seguinte diálogo com CHATGPT:

In Haskell, given data Exp = Var String | Term String [Exp], can you write me a function paths :: Exp -> [[Strings]] that gives all paths from the root of a Exp tree to every leaf or intermediate node?

Yes, here's an example implementation of the `paths` function in Haskell:

lua · Copy code

```lua
paths :: Exp -> [[String]]
paths (Var v) = [[v]]
paths (Term t es) = map (t:) (concatMap paths es)
```

A função *paths* proposta, que compila sem problemas, baseia-se em

$$\left\{ \begin{array}{l} concatMap\ f\ [\,] = [\,] \\ concatMap\ f\ (h : t) = f\ h +\!\!+\ concatMap\ f\ t \end{array} \right. \tag{E6}$$

definida em Data.Foldable.

- Tomando como exemplo $t = Term$ `"+"` $[\,Var$ `"x"`, Var `"y"`$]$, mostre que *paths* **não** responde a **tudo** o que se pede. (Justifique sumaria mas convincentemente a sua resposta).
- Mostre que (E6) é um catamorfismo de listas.

Questão 8 Pode mostrar-se que a função *concatMap* (E6) sugerida pelo CHATGPT na questão 7 satisfaz a igualdade

$$concatMap\ f = \mathsf{concat} \cdot \mathsf{map}\ f \tag{E7}$$

onde $\mathsf{concat} = (\!|\,[\mathsf{nil}\,,\mathsf{conc}]\,|\!)$ — para $\mathsf{nil}\ \_ = [\,]$ e $\mathsf{conc}\ (a, b) = a +\!\!+ b$ — e $\mathsf{map}\ f$ é o functor das listas. Mostre que, como as listas formam o mónade

$$X \xrightarrow{\mathsf{singl}} \mathsf{T}X \xleftarrow{\mathsf{concat}} \mathsf{T}^2 X \tag{E8}$$

onde $\mathsf{T}\ X = X^*$ e $\mathsf{singl}\ x = [x]$, então tem-se

$$concatMap\ f\ x = x \ggg f \tag{E9}$$

nesse monade.