Cálculo de Programas

3.º Ano de LEI+MiEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2022/23

Teste — 13 de Janeiro de 2023, 14h00–16h00
Salas E1-0.04 + E1-0.08

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Questão 1 Recordando da biblioteca `Cp.hs` o isomorfismo $\mathsf{undistl} = [i_1 \times id, i_2 \times id]$, use diagramas para:

- descrever o tipo de $\mathsf{undistl}$;
- inferir a propriedade *natural* (ie. "grátis'") da função distl que é inversa de $\mathsf{undistl}$. (**NB:** tem de formular essa propriedade mas não se pede para a provar analiticamente.)

Questão 2 Sabendo que a igualdade

$$(p? + p?) \cdot p? \;=\; (i_1 + i_2) \cdot p? \tag{E1}$$

se verifica, demonstre a seguinte propriedade do condicional de McCarthy:

$$p \rightarrow (p \rightarrow a\ ,\ b)\ ,\ (p \rightarrow c\ ,\ d) \;=\; p \rightarrow a\ ,\ d \tag{E2}$$

Questão 3 Considere-se a função

$$h = \mathsf{for}\ loop\ (0, 1) \tag{E3}$$

onde $loop\ (a, b) = (b, a + b)$. Sabendo que

$$\mathsf{for}\ g\ i = (\!|\, [\underline{i}, g] \,|\!) \tag{E4}$$

e recorrendo à lei de recursividade mútua, deduza as definições *pointwise* das funções f e g tal que $h = \langle f, g \rangle$.

Questão 4 Mostre que o anamorfismo que calcula os sufixos de uma lista

$$suffixes = [\!(g)\!]\ \mathbf{where}\ g = (id + \langle \mathsf{cons}, \pi_2 \rangle) \cdot \mathsf{out}$$

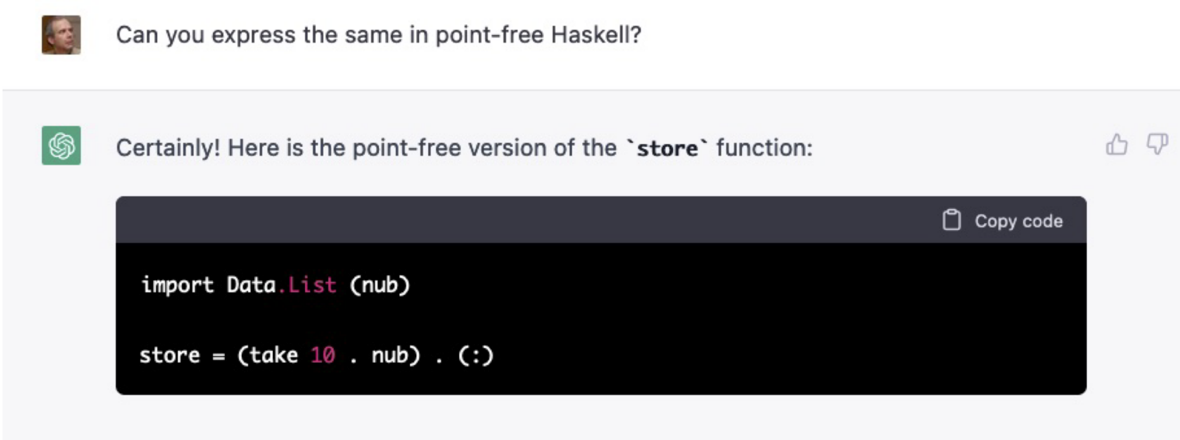
é a função:

$$suffixes\ [\,] = [\,]$$
$$suffixes\ (h : t) = (h : t) : suffixes\ t$$

Questão 5 Recorde o *problema do telemóvel antigo* que foi abordado na primeira ficha das aulas práticas desta disciplina:

> *(...) For each **list of calls** stored in the mobile phone (eg. numbers dialed, SMS messages, lost calls), the **store** operation should work in a way such that **(a)** the more recently a **call** is made the more accessible it is; **(b)** no number appears twice in a list; **(c)** only the most recent 10 entries in each list are stored.*

Tendo-se pedido ao CHATGPT uma solução **pointfree** para estes requisitos, a resposta foi esta, para $store :: Eq\ a \Rightarrow a \rightarrow [a] \rightarrow [a]$:

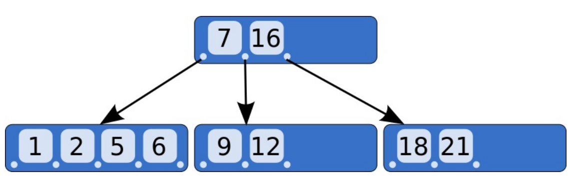


Apesar de impressionante, a resposta tem um erro (apenas!). Identifique-o e diga como se pode corrigir.[1]

Questão 6 Uma "B-tree" é uma generalização das árvores binárias do módulo BTree a mais do que duas sub-árvores por nó:

$$\mathbf{data}\ \mathsf{B\_tree}\ a = Nil \mid Block\ \{ leftmost :: \mathsf{B\_tree}\ a, block :: [(a, \mathsf{B\_tree}\ a)] \}$$

Por exemplo, a B-tree[2]



é representada no tipo acima por:

$$\begin{array}{l} t = Block\ \{ \\ \quad leftmost = Block\ \{ \\ \qquad leftmost = Nil, \\ \qquad block = [(1, Nil), (2, Nil), (5, Nil), (6, Nil)] \}, \end{array}$$

[1] CHATGPT usa a função nub, para a qual dá a seguinte explicação: *"In Haskell, the nub function is used to remove duplicate elements from a list. It returns a new list containing only the unique elements from the original list, in the order in which they first appear. For example, $nub\ [1, 2, 3, 2, 1]$ would return $[1, 2, 3]$"*.

[2] Créditos: figura extraída de `https://en.wikipedia.org/wiki/B-tree`.

$$
\begin{array}{l}
\quad \mathit{block} = [\\
\quad\quad (7, \mathit{Block}\ \{\\
\quad\quad\quad \mathit{leftmost} = \mathit{Nil},\\
\quad\quad\quad \mathit{block} = [(9, \mathit{Nil}), (12, \mathit{Nil})]\,\}),\\
\quad\quad (16, \mathit{Block}\ \{\\
\quad\quad\quad \mathit{leftmost} = \mathit{Nil},\\
\quad\quad\quad \mathit{block} = [(18, \mathit{Nil}), (21, \mathit{Nil})]\,\})\\
\quad\quad]\,\}
\end{array}
$$

Identifique, justificando, o functor de base

$$
\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{B}\ (X, Y) = \ldots \\ \mathsf{B}\ (f, g) = \ldots. \end{array} \right.
$$

que capta o padrão de recursividade da declaração de $\mathsf{B\_tree}$ dada acima, em Haskell, bem como o isomorfismo:

$$\mathsf{in} : \mathsf{B}\ (A, \mathsf{B\_tree}\ A) \to \mathsf{B\_tree}\ A.$$

Questão 7 Considere a seguinte definição

$$
\begin{array}{l}
\mathit{dups} :: (\mathit{Eq}\ a) \Rightarrow [\,a\,] \to \mathbb{B}\\
\mathit{dups}\ [\,] = \textsc{False}\\
\mathit{dups}\ (h : t) = h \in t \vee (\mathit{dups}\ t)
\end{array}
$$

de uma função que testa se uma lista contém elementos repetidos. Defina-a como um hilomorfismo identificando B e os genes f e g do diagrama seguinte:

$$
\begin{tikzcd}
A^* \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[d, "\llbracket g \rrbracket"'] \arrow[dd, bend right=60, "\mathit{dups}"'] & \mathsf{B}\ (\mathbb{B}, A^*) \arrow[d, "\mathsf{B}\ (id, \llbracket g \rrbracket)"] \\
\mathbb{B}^* \arrow[r, bend left, "\mathsf{out}"] \arrow[d, "(\!| f |\!)"'] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathsf{B}\ (\mathbb{B}, \mathbb{B}^*) \arrow[l, bend left, "\mathsf{in}"] \arrow[d, "\mathsf{B}\ (id, (\!| f |\!))"] \\
\mathbb{B} & \mathsf{B}\ (\mathbb{B}, \mathbb{B}) \arrow[l, bend left, "f"]
\end{tikzcd}
$$

Questão 8 Pode mostrar-se que a seguinte variante do tipo "rose tree"

$$\mathbf{data}\ \mathsf{Rose}\ a = L\ a \mid R\ [\mathsf{Rose}\ a]$$

que tem por base $\mathsf{B}\ (f, g) = f + \mathsf{map}\ g$, forma um mónade

$$X \xrightarrow{u} \mathsf{Rose}\ X \xleftarrow{\mu} \mathsf{Rose}\ (\mathsf{Rose}\ X)$$

onde

$$u = L \tag{E5}$$
$$\mu = (\!|\, [id, \mathsf{in} \cdot i_2] \,|\!) \tag{E6}$$

Construa as funções in / out para este tipo e desenhe o diagrama dos seus catamorfismos. Com base nesse diagrama,

- Converta para Haskell com variáveis a componente μ do referido mónade.
- Mostre que a lei monádica $\mu \cdot u = id$ se verifica.
