Cálculo de Programas

Lic. C. Computação (2º ano)
Lic./Mest. em Engenharia Informática (3º ano)
UNIVERSIDADE DO MINHO

2021/22 - Ficha nr.° 11

1. O facto de $\mathsf{length} : A^* \to \mathbb{N}_0$ poder ser definida tanto como *catamorfismo* de listas como *anamorfismo* de naturais (que foi assunto de uma questão de uma ficha anterior) pode generalizar-se da forma seguinte: sejam dados dois tipos indutivos

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{T}_1 \arrow[rr, bend left, "\mathsf{out}_1"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & \mathsf{F}\ \mathsf{T}_1 \arrow[ll, bend left, "\mathsf{in}_1"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{T}_2 \arrow[rr, bend left, "\mathsf{out}_2"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & \mathsf{G}\ \mathsf{T}_2 \arrow[ll, bend left, "\mathsf{in}_2"]
\end{tikzcd}
$$

e $\alpha : \mathsf{F}\ X \to \mathsf{G}\ X$, isto é, α satisfaz a propriedade *grátis*

$$\mathsf{G}\, f \cdot \alpha = \alpha \cdot \mathsf{F}\, f \tag{F1}$$

Então $(\!|\, \mathsf{in}_2 \cdot \alpha \,|\!) = [\!(\alpha \cdot \mathsf{out}_1)\!]$, como se mostra a seguir (complete as justificações):

$$
\begin{array}{ll}
 & k = (\!|\, \mathsf{in}_2 \cdot \alpha \,|\!) \\
\equiv & \quad \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
 & k \cdot \mathsf{in}_1 = \mathsf{in}_2 \cdot \alpha \cdot \mathsf{F}\ k \\
\equiv & \quad \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
 & \mathsf{out}_2 \cdot k = \mathsf{G}\ k \cdot \alpha \cdot \mathsf{out}_1 \\
\equiv & \quad \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
 & k = [\!(\alpha \cdot \mathsf{out}_1)\!] \\
\Box &
\end{array}
$$

Identifique T_1, T_2 e α para o caso de $k = \mathsf{length}$.

2. Mostre que o anamorfismo $\mathsf{repeat} = [\!(\langle id, id \rangle)\!]$ definido pelo diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A^\infty & A \times A^\infty \arrow[l, "\mathsf{cons}"'] \\
A \arrow[u, "\mathsf{repeat}"] \arrow[r, "\langle id, id \rangle"'] & A \times A \arrow[u, "id \times \mathsf{repeat}"']
\end{tikzcd}
$$

é a função: $\mathsf{repeat}\ a = a : \mathsf{repeat}\ a$. De seguida, recorrendo às leis dos anamorfismos mostre que, apesar de não terminar[1], repeat satisfaz a propriedade:[2]

$$\mathsf{map}\ f \cdot \mathsf{repeat} = \mathsf{repeat} \cdot f \tag{F2}$$

[1]Por isso usamos, no diagrama, A^∞ em vez de A^*, para incluir também as listas infinitas.
[2]"Verifique" este facto comparando, por exemplo, $(\mathsf{take}\ 10 \cdot \mathsf{map\ succ} \cdot \mathsf{repeat})\ 1$ com $(\mathsf{take}\ 10 \cdot \mathsf{repeat} \cdot \mathsf{succ})\ 1$.

3. Um mónade é um functor T equipado com duas funções μ e u,

$$A \xrightarrow{u} \mathsf{T}\ A \xleftarrow{\mu} \mathsf{T}\ (\mathsf{T}\ A)$$

que satisfazem (para além das naturais, ie. "grátis") as propriedades $\mu \cdot u = id = \mu \cdot \mathsf{T}\ u$ e $\mu \cdot \mu = \mu \cdot \mathsf{T}\ \mu$ — identifique-as no formulário — com base nas quais se pode definir a *composição monádica*:

$$f \bullet g = \mu \cdot \mathsf{T}\ f \cdot g.$$

(Identifique-a também no formulário.) Demonstre os factos seguintes:

$$\mu = id \bullet id \tag{F3}$$
$$f \bullet u = f \quad \wedge \quad f = u \bullet f \tag{F4}$$
$$(f \cdot g) \bullet h = f \bullet (\mathsf{T}\ g \cdot h) \tag{F5}$$
$$\mathsf{T}\ f = (u \cdot f) \bullet id \tag{F6}$$

4. A função $discollect : (A \times B^*)^* \rightarrow (A \times B)^*$ que apareceu (sem ser definida) numa questão das primeiras fichas não é mais do que

$$discollect = lstr \bullet id \tag{F7}$$

— onde $lstr\ (a, x) = [(a, b) \mid b \leftarrow x]$ — no mónade das listas, $\mathsf{T}\ A = A^*$,

$$A \xrightarrow{\mathsf{singl}} A^* \xleftarrow{\mathsf{concat}} (A^*)^*$$

onde $u = \mathsf{singl}$ e $\mu = \mathsf{concat} = (\![[\mathsf{nil}\ , \mathsf{conc}]]\!)$. Recordando a lei de absorção-cata (para listas), derive uma definição recursiva para $discollect$ que não use nenhum dos combinadores 'point-free' estudados nesta disciplina.

5. Suponha um tipo indutivo $\mathsf{T}\ X$ cuja base é o bifunctor

$\mathsf{B}\ (X, Y) = X + \mathsf{F}\ Y$
$\mathsf{B}\ (f, g) = f + \mathsf{F}\ g$

onde F é um outro qualquer functor.

- Mostre que $\mathsf{T}\ X$ é um mónade em que
  $\mu = (\![[id\ , \mathsf{in} \cdot i_2]]\!)$
  $u = \mathsf{in} \cdot i_1$
  onde $\mathsf{in} : \mathsf{B}\ (X, \mathsf{T}\ X) \rightarrow \mathsf{T}\ X$.
- Alguns mónades conhecidos, por exemplo LTree, resultam desta lei geral. Identifique F em cada caso.
- Para $\mathsf{F}\ Y = 1$ (e $\mathsf{F}\ f = id$) qual é o mónade que se obtém por esta regra? E no caso em que $\mathsf{F}\ Y = O \times Y^*$, onde o tipo O se considera fixo à partida?