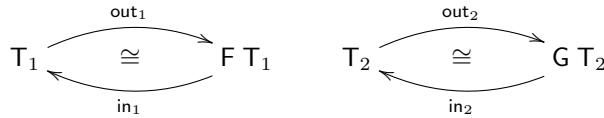


Cálculo de Programas

Lic. C. Computação (2º ano)
 Lic./Mest. em Engenharia Informática (3º ano)
 UNIVERSIDADE DO MINHO

2021/22 - Ficha nr.º 11

1. O facto de $\text{length}: A^* \rightarrow \mathbb{N}_0$ poder ser definida tanto como *catamorfismo* de listas como *anamorfismo* de naturais (que foi assunto de uma questão de uma ficha anterior) pode generalizar-se da forma seguinte: sejam dados dois tipos indutivos



e $\alpha : F X \rightarrow G X$, isto é, α satisfaz a propriedade *grátis*

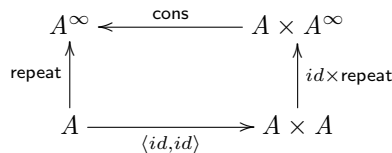
$$G f \cdot \alpha = \alpha \cdot F f \tag{F1}$$

Então $(\text{in}_2 \cdot \alpha) = [(\alpha \cdot \text{out}_1)]$, como se mostra a seguir (complete as justificações):

$$\begin{aligned} k &= (\text{in}_2 \cdot \alpha) \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ k \cdot \text{in}_1 &= \text{in}_2 \cdot \alpha \cdot F k \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ \text{out}_2 \cdot k &= G k \cdot \alpha \cdot \text{out}_1 \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ k &= [(\alpha \cdot \text{out}_1)] \\ &\square \end{aligned}$$

Identifique T_1 , T_2 e α para o caso de $k = \text{length}$.

2. Mostre que o anamorfismo $\text{repeat} = [(\langle id, id \rangle)]$ definido pelo diagrama



é a função: $\text{repeat } a = a : \text{repeat } a$. De seguida, recorrendo às leis dos anamorfismos mostre que, apesar de não terminar¹, repeat satisfaz a propriedade:²

$$\text{map } f \cdot \text{repeat} = \text{repeat} \cdot f \tag{F2}$$

¹Por isso usamos, no diagrama, A^∞ em vez de A^* , para incluir também as listas infinitas.
²“Verifique” este facto comparando, por exemplo, $(\text{take } 10 \cdot \text{map succ} \cdot \text{repeat}) 1$ com $(\text{take } 10 \cdot \text{repeat} \cdot \text{succ}) 1$.

3. Um mónade é um functor T equipado com duas funções μ e u ,

$$A \xrightarrow{u} T A \xleftarrow{\mu} T (T A)$$

que satisfazem (para além das naturais, ie. “grátis”) as propriedades $\mu \cdot u = id = \mu \cdot T u$ e $\mu \cdot \mu = \mu \cdot T \mu$ — identifique-as no formulário — com base nas quais se pode definir a *composição monádica*:

$$f \bullet g = \mu \cdot T f \cdot g.$$

(Identifique-a também no formulário.) Demonstre os factos seguintes:

$$\mu = id \bullet id \tag{F3}$$

$$f \bullet u = f \quad \wedge \quad f = u \bullet f \tag{F4}$$

$$(f \cdot g) \bullet h = f \bullet (T g \cdot h) \tag{F5}$$

$$T f = (u \cdot f) \bullet id \tag{F6}$$

4. A função $discollect : (A \times B^*)^* \rightarrow (A \times B)^*$ que apareceu (sem ser definida) numa questão das primeiras fichas não é mais do que

$$discollect = lstr \bullet id \tag{F7}$$

— onde $lstr(a, x) = [(a, b) \mid b \leftarrow x]$ — no mónade das listas, $T A = A^*$,

$$A \xrightarrow{singl} A^* \xleftarrow{concat} (A^*)^*$$

onde $u = singl$ e $\mu = concat = \langle [nil, conc] \rangle$. Recordando a lei de absorção-cata (para listas), derive uma definição recursiva para $discollect$ que não use nenhum dos combinadores ‘point-free’ estudados nesta disciplina.

5. Suponha um tipo indutivo $T X$ cuja base é o bifunctor

$$B(X, Y) = X + F Y$$

$$B(f, g) = f + F g$$

onde F é um outro qualquer functor.

- Mostre que $T X$ é um mónade em que

$$\mu = \langle [id, in \cdot i_2] \rangle$$

$$u = in \cdot i_1$$

onde $in : B(X, T X) \rightarrow T X$.

- Alguns mónades conhecidos, por exemplo $LTree$, resultam desta lei geral. Identifique F em cada caso.
- Para $F Y = 1$ (e $F f = id$) qual é o mónade que se obtém por esta regra? E no caso em que $F Y = O \times Y^*$, onde o tipo O se considera fixo à partida?