# Cálculo de Programas

Lic. C. Computação (2º ano)
Lic./Mest. em Engenharia Informática (3º ano)
UNIVERSIDADE DO MINHO

2021/22 - Ficha nr.° 6

1. Os diagramas seguintes representam as **propriedades universais** que definem o combinador **catamorfismo** para dois tipos de dados — números naturais $\mathbb{N}_0$ à esquerda e listas finitas $A^*$ à direita:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}_0 \arrow[d, "(\!| g |\!)"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "id + (\!| g |\!)"] \\ B & 1 + B \arrow[l, "g"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A^* \arrow[d, "(\!| g |\!)"'] & 1 + A \times A^* \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "id + id \times (\!| g |\!)"] \\ B & 1 + A \times B \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} \mathsf{in} = [\mathsf{zero}\ , \mathsf{succ}] \\ \mathsf{zero}\ \_ = 0 \\ \mathsf{succ}\ n = n + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\ , \mathsf{cons}] \\ \mathsf{nil}\ \_ = [\,] \\ \mathsf{cons}\ (a, x) = a : x \end{cases}$$

$$k = (\!| g |\!) \equiv k \cdot \mathsf{in} = g \cdot (id + k) \qquad k = (\!| g |\!) \equiv k \cdot \mathsf{in} = g \cdot (id + id \times k)$$

$$\mathsf{for}\ b\ i = (\!| [\underline{i}\ , b] |\!) \qquad \mathsf{foldr}\ f\ u = (\!| [\underline{u}\ , \widehat{f}] |\!)$$

onde $\widehat{f}$ abrevia $\mathsf{uncurry} f$.

(a) Tendo em conta o diagrama da esquerda, codifique, em Haskell

$$(\!| g |\!) = g \cdot (id + (\!| g |\!)) \cdot \mathsf{out}$$

e

$$\mathsf{for}\ b\ i = (\!| [\underline{i}\ , b] |\!)$$

em que out foi calculada numa ficha anterior. De seguida, codifique

$$f = \pi_2 \cdot aux \ \mathbf{where}\ aux = \mathsf{for}\ \langle \mathsf{succ} \cdot \pi_1, \mathsf{mul} \rangle\ (1, 1)$$

e inspeccione o comportamento de $f$. Que função é essa?

(b) Identifique como catamorfismos de listas as funções seguintes, indicando o gene $g$ para cada caso:[1]

i. $k$ é a função que multiplica todos os elementos de uma lista
ii. $k = \mathsf{reverse}$
iii. $k = \mathsf{concat}$
iv. $k$ é a função $\mathsf{map}\ f$, para um dado $f : A \to B$
v. $k$ é a função que calcula o máximo de uma lista de números naturais (${\mathbb{N}_0}^*$).
vi. $k = \mathsf{filter}\ p$ onde

$$\mathsf{filter}\ p\ [\,] = [\,]$$
$$\mathsf{filter}\ p\ (h : t) = x +\!\!+ \mathsf{filter}\ p\ t \ \mathbf{where}\ x = \mathbf{if}\ (p\ h)\ \mathbf{then}\ [h]\ \mathbf{else}\ [\,]$$

[1] Apoie a sua resolução com diagramas.

2. Sabendo que $\mathsf{for}\ f\ i = (\![\,[\underline{i}\ , f]\,]\!)$ para $\mathsf{F}\ f = id + f$ (naturais), recorra à lei de fusão-cata para demonstrar a propriedade:

$$f \cdot (\mathsf{for}\ f\ i) = \mathsf{for}\ f\ (f\ i) \tag{F1}$$

3. Mostre que as funções

$$f = \mathsf{for}\ id\ i$$
$$g = \mathsf{for}\ \underline{i}\ i$$

são a mesma função. (Qual?)

4. A função seguinte, em Haskell

$$sumprod\ a\ [\,] = 0$$
$$sumprod\ a\ (h : t) = a * h + sumprod\ a\ t$$

é o catamorfismo de listas

$$sumprod\ a \quad = \quad (\![\,[\mathsf{zero}\ , \mathsf{add} \cdot ((a*) \times id)]\,]\!) \tag{F2}$$

onde $\mathsf{zero} = \underline{0}$ e $\mathsf{add}\ (x, y) = x + y$. Mostre, como exemplo de aplicação da propriedade de **fusão-cata** para listas, que

$$sumprod\ a \quad = \quad (a*) \cdot \mathsf{sum} \tag{F3}$$

onde $\mathsf{sum} = (\![\,[\mathsf{zero}\ , \mathsf{add}]\,]\!)$. **NB:** não ignore propriedades elementares da aritmética que lhe possam ser úteis.

5. Considere o functor

$$\mathsf{T}\ X = X \times X$$
$$\mathsf{T}\ f = f \times f$$

e as funções

$$\mu = \pi_1 \times \pi_2$$
$$u = \langle id, id \rangle.$$

Mostre que a propriedade $\mu \cdot \mathsf{T}\ u = id = \mu \cdot u$ se verifica.

6. Sejam dados os functores elementares seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = \mathbb{Z} \\ \mathsf{F}\ f = id \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{G}\ X = X \\ \mathsf{G}\ f = f \end{array} \right.$$

Calcule $\mathsf{H}\ f$ e $\mathsf{K}\ f$ para

$$\mathsf{H}\ X = \mathsf{F}\ X + \mathsf{G}\ X \quad \text{e} \quad \mathsf{K}\ X = \mathsf{G}\ X \times \mathsf{F}\ X$$