

Cálculo de Programas

Lic. C. Computação (2º ano)
 Lic./Mest. em Engenharia Informática (3º ano)
 UNIVERSIDADE DO MINHO

2021/22 - Ficha nr.º 5

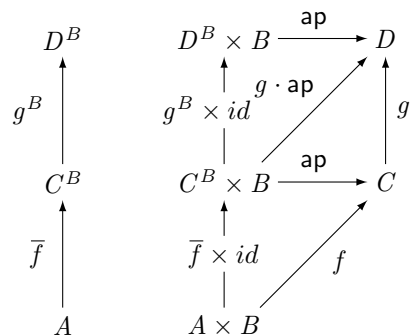
1. Recorde o diagrama ao lado que foi usado nas aulas teóricas para formular a lei de absorção da exponenciação

$$\overline{g \cdot f} = g^B \cdot \bar{f}$$

onde

$$g^B = \overline{g \cdot \text{ap}} \tag{F1}$$

Apresente justificações no raciocínio abaixo que pretende mostrar que g^B (que também se pode escrever $\text{exp } g$) é a função $g^B f = g \cdot f$:



$$\begin{aligned}
 & g^B = \overline{g \cdot \text{ap}} \\
 \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\
 & g \cdot \text{ap} = \text{ap} \cdot (g^B \times \text{id}) \\
 \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\
 & g (\text{ap} (f, b)) = \text{ap} (g^B f, b) \\
 \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\
 & g^B f b = g (f b) \\
 \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\
 & g^B f = g \cdot f
 \end{aligned}$$

2. Considere a função $\text{iso} = \langle ! + !, [\text{id}, \text{id}] \rangle$, onde $! : A \rightarrow 1$ designa a única função constante que habita o tipo $A \rightarrow 1$.¹

- (a) Identifique o isomorfismo que ela testemunha, desenhando-a sob a forma de um diagrama de tipos.
- (b) Derive a partir desse diagrama a propriedade (dita *grátis*) de iso ,

$$(\text{id} \times f) \cdot \text{iso} = \text{iso} \cdot (f + f) \tag{F2}$$

- (c) Confirme, por cálculo analítico, essa propriedade.

¹A função $! : A \rightarrow 1$ costuma-se designar-se também por função “bang”.

- (d) Derive uma definição em Haskell *pointwise* de iso.
- Deduza o tipo mais geral da função $\alpha = (id + \pi_1) \cdot i_2 \cdot \pi_2$ e infira a respectiva propriedade *grátis* (*natural*) através de um diagrama.
 - Identifique, apoiando a sua resolução num diagrama, qual é a definição da função polimórfica α cuja propriedade natural (“grátis”) é

$$(f + h) \cdot \alpha = \alpha \cdot (f + g \times h)$$

- Para o caso de um *isomorfismo* α , têm-se as equivalências:

$$\alpha \cdot g = h \equiv g = \alpha^\circ \cdot h \tag{F3}$$

$$g \cdot \alpha = h \equiv g = h \cdot \alpha^\circ \tag{F4}$$

Recorra a essas propriedades para mostrar que a igualdade

$$h \cdot \text{distr} \cdot (g \times (id + \alpha)) = k$$

é equivalente à igualdade

$$h \cdot (g \times id + g \times \alpha) = k \cdot \text{undistr}$$

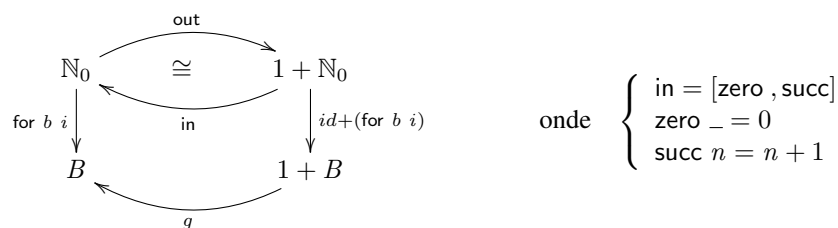
(**Sugestão:** não ignore a propriedade natural (i.e. *grátis*) do isomorfismo *distr*.)

- Seja dada uma função ∇ da qual só sabe duas propriedades: $\nabla \cdot i_1 = id$ e $\nabla \cdot i_2 = id$. Mostre que, necessariamente, ∇ satisfaz também a propriedade natural $f \cdot \nabla = \nabla \cdot (f + f)$.
- Seja dada a seguinte codificação em Haskell do combinador

$$\begin{cases} \text{for } b \ i \ 0 = i \\ \text{for } b \ i \ (n + 1) = b \ (\text{for } b \ i \ n) \end{cases} \tag{F5}$$

que implementa a noção de ciclo-for, onde b é o corpo (“body”) do ciclo e i é a sua inicialização.

Repetindo o processo que foi feito na aula teórica para a função $(a \times)$, calcule a partir de (F5) a função g que encaixa no diagrama seguinte,



- Repita o exercício anterior para a função $(a +)$ sabendo que são válidas as seguintes duas igualdades:

$$\begin{cases} a + 0 = a \\ a + (n + 1) = 1 + (a + n) \end{cases} \tag{F6}$$