Cálculo de Programas

Lic. C. Computação (2º ano)
Lic./Mest. em Engenharia Informática (3º ano)
UNIVERSIDADE DO MINHO

2021/22 - Ficha nr.° 5

1. Recorde o diagrama ao lado que foi usado nas aulas téoricas para formular a lei de absorção da exponenciação

   $$\overline{g \cdot f} = g^B \cdot \overline{f}$$

   onde

   $$g^B = \overline{g \cdot \mathsf{ap}} \qquad \text{(F1)}$$

   $$\begin{tikzcd}
D^B & & D^B \times B \arrow[r, "\mathsf{ap}"] & D \\
C^B \arrow[u, "g^B"] & & C^B \times B \arrow[u, "g^B \times id"] \arrow[r, "\mathsf{ap}"] \arrow[ur, "g \cdot \mathsf{ap}"] & C \arrow[u, "g"'] \\
A \arrow[u, "\overline{f}"] & & A \times B \arrow[u, "\overline{f} \times id"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

   Apresente justificações no raciocínio abaixo que pretende mostrar que g^B (que também se pode escrever $\mathsf{exp}\ g$) é a função $g^B\ f = g \cdot f$:

$$
\begin{array}{ll}
& g^B = \overline{g \cdot \mathsf{ap}} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& g \cdot \mathsf{ap} = \mathsf{ap} \cdot (g^B \times id) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& g\ (\mathsf{ap}\ (f, b)) = \mathsf{ap}\ (g^B\ f, b) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& g^B\ f\ b = g\ (f\ b) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& g^B\ f = g \cdot f
\end{array}
$$

2. Considere a função $\mathsf{iso} = \langle ! + !, [id\ , id] \rangle$, onde $! : A \to 1$ designa a única função constante que habita o tipo $A \to 1$.[1]

   (a) Identifique o isomorfismo que ela testemunha, desenhando-a sob a forma de um diagrama de tipos.

   (b) Derive a partir desse diagrama a propriedade (dita *grátis*) de iso,

   $$(id \times f) \cdot \mathsf{iso} \quad = \quad \mathsf{iso} \cdot (f + f) \qquad \text{(F2)}$$

   (c) Confirme, por cálculo analítico, essa propriedade.

[1] A função $! : A \to 1$ costuma-se designar-se também por função *"bang"*.

(d) Derive uma definição em Haskell *pointwise* de iso.

3. Deduza o tipo mais geral da função $\alpha = (id + \pi_1) \cdot i_2 \cdot \pi_2$ e infira a respectiva propriedade *grátis* (*natural*) através de um diagrama.

4. Identifique, apoiando a sua resolução num diagrama, qual é a definição da função polimórfica α cuja propriedade natural ("grátis") é

$$(f + h) \cdot \alpha \quad = \quad \alpha \cdot (f + g \times h)$$

5. Para o caso de um *isomorfismo* α, têm-se as equivalências:

$$\alpha \cdot g = h \;\equiv\; g = \alpha^{\circ} \cdot h \tag{F3}$$
$$g \cdot \alpha = h \;\equiv\; g = h \cdot \alpha^{\circ} \tag{F4}$$

Recorra a essas propriedades para mostrar que a igualdade

$$h \cdot \mathsf{distr} \cdot (g \times (id + \alpha)) = k$$

é equivalente à igualdade

$$h \cdot (g \times id + g \times \alpha) = k \cdot \mathsf{undistr}$$

(**Sugestão:** não ignore a propriedade natural (i.e. *grátis*) do isomorfismo distr.)

6. Seja dada uma função ∇ da qual só sabe duas propriedades: $\nabla \cdot i_1 = id$ e $\nabla \cdot i_2 = id$. Mostre que, necessariamente, ∇ satisfaz também a propriedade natural $f \cdot \nabla = \nabla \cdot (f + f)$.

7. Seja dada a seguinte codificação em Haskell do combinador

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{for}\ b\ i\ 0 = i \\ \mathsf{for}\ b\ i\ (n+1) = b\ (\mathsf{for}\ b\ i\ n) \end{array} \right. \tag{F5}$$

que implementa a noção de ciclo-for, onde b é o corpo ("body") do ciclo e i é a sua inicialização.

Repetindo o processo que foi feito na aula teórica para a função $(a\times)$, calcule a partir de (F5) a função g que encaixa no diagrama seguinte,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0 \arrow[d, "\mathsf{for}\ b\ i"'] \arrow[r, bend left, "\mathsf{out}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & 1+\mathbb{N}_0 \arrow[l, bend left, "\mathsf{in}"] \arrow[d, "id+(\mathsf{for}\ b\ i)"] \\
B & 1+B \arrow[l, bend left, "g"]
\end{tikzcd}
\qquad \text{onde} \quad
\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{in} = [\mathsf{zero}\ , \mathsf{succ}] \\ \mathsf{zero}\ _ = 0 \\ \mathsf{succ}\ n = n+1 \end{array} \right.$$

8. Repita o exercício anterior para a função $(a+)$ sabendo que são válidas as seguintes duas igualdades:

$$\left\{ \begin{array}{l} a + 0 = a \\ a + (n+1) = 1 + (a + n) \end{array} \right. \tag{F6}$$