Cálculo de Programas

Lic. C. Computação (2º ano)
Lic./Mest. em Engenharia Informática (3º ano)
UNIVERSIDADE DO MINHO

2021/22 - Ficha nr.° 4

1. Recorde a função

$$\begin{array}{l} \mathsf{ap} : (C^B \times B) \rightarrow C \\ \mathsf{ap}\ (f, x) = f\ x \end{array}$$

   (a) Mostre, através da adição de variáveis, que a função f definida a seguir

   $$f\ k = \mathsf{ap} \cdot (k \times id)$$

   é a função

   $$\begin{array}{l} \mathsf{uncurry} :: (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow (a, b) \rightarrow c \\ \mathsf{uncurry}\ f\ (a, b) = f\ a\ b \end{array}$$

   disponível em Haskell.

   (b) Mostre que a igualdade

   $$\mathsf{ap} \cdot (\mathsf{curry}\ f \times id) = f \tag{F1}$$

   corresponde à definição $\mathsf{curry}\ f\ a\ b = f\ (a, b)$ da função $\mathsf{curry} :: ((a, b) \rightarrow c) \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c$ também disponível em Haskell.

2. Abreviando $\mathsf{curry}\ f$ por $\overline{f}$, identifique a propriedade (F1) no formulário e diga como a deriva da propriedade universal da exponenciação, que a seguir se descreve através de um diagrama:

$$\begin{tikzcd} C^B & C^B \times B \arrow[r, "ap"] & C \\ A \arrow[u, "k"] & A \times B \arrow[u, "k \times id"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad k = \overline{f} \ \equiv\ \mathsf{ap} \cdot (k \times id) = f$$

3. Considere o isomorfismo de ordem superior *flip* definido pela composição de isomorfismos seguinte:

$$\begin{array}{ccccccc} (C^B)^A & \cong & C^{A \times B} & \cong & C^{B \times A} & \cong & (C^A)^B \\ f & \mapsto & \widehat{f} & \mapsto & \widehat{f}.\mathsf{swap} & \mapsto & \overline{\widehat{f} \cdot \mathsf{swap}} = \mathit{flip}\ f \end{array}$$

   - Mostre que *flip*, acima definida por $\mathit{flip}\ f = \overline{\widehat{f} \cdot \mathsf{swap}}$, é um isomorfismo por ser a sua própria inversa, isto é, por

   $$\mathit{flip}\ (\mathit{flip}\ f) = f \tag{F2}$$

   se verificar.

- Mostre ainda que $\mathit{flip}\ f\ x\ y = f\ y\ x$.

4. Apresente justificações para a demonstração da igualdade

$$\overline{f}\ a = f \cdot \langle \underline{a}, id \rangle \tag{F3}$$

que se segue:

$$
\begin{array}{ll}
& \overline{f}\ a = f \cdot \langle \underline{a}, id \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \overline{f}\ a = \mathsf{ap} \cdot (\overline{f} \times id) \cdot \langle \underline{a}, id \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \overline{f}\ a = \mathsf{ap} \cdot \langle \underline{\overline{f}\ a}, id \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \ \mathsf{ap} \cdot \langle \underline{k}, id \rangle = k \ (\text{cf. } \underline{k}\ \_ = k) \ \} \\
& \mathit{true} \\
\Box &
\end{array}
$$

5. Prove a igualdade $\overline{f \cdot (g \times h)} = \overline{\mathsf{ap} \cdot (id \times h)} \cdot \overline{f} \cdot g$ usando as leis das exponenciais e dos produtos.

6. Considere o isomorfismo

$$
\begin{tikzcd}
A^{B+C} \arrow[rr, bend left, "\mathsf{unjoin}"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & A^B \times A^C \arrow[ll, bend left, "\mathsf{join}"]
\end{tikzcd}
\tag{F4}
$$

onde

$\mathsf{join}\ (f, g) = [f\ , g]$
$\mathsf{unjoin}\ k = (k \cdot i_1, k \cdot i_2)$

Mostre que $\mathsf{join} \cdot \mathsf{unjoin} = id$ e que $\mathsf{unjoin} \cdot \mathsf{join} = id$.

7. Complete os "?"do diagrama

$$
\begin{tikzcd}
? \arrow[rr, bend left, "\mathsf{unsplit}"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & ? \arrow[ll, bend left, "\mathsf{split}"]
\end{tikzcd}
$$

onde

$\mathsf{split}\ (f, g) = \langle f, g \rangle$
$\mathsf{unsplit}\ k = (\pi_1 \cdot k, \pi_2 \cdot k)$

8. Prove a igualdade $\underline{g} = \overline{g \cdot \pi_2}$ sabendo que

$$\overline{\pi_2} = \underline{id} \tag{F5}$$

se verifica.