Cálculo de Programas

Lic. C. Computação (2º ano)
Lic./Mest. em Engenharia Informática (3º ano)
UNIVERSIDADE DO MINHO

2021/22 - Ficha nr.° 1

1. A composição de funções define-se, em Haskell, tal como na matemática:

$$(f \cdot g)\ x = f\ (g\ x)$$

   (a) Calcule $(f \cdot g)\ x$ para os casos seguintes:

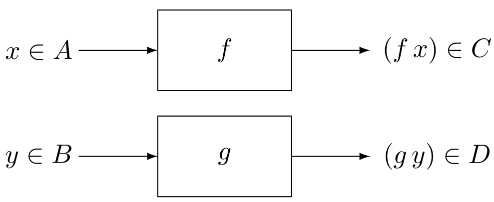
$$\left\{\begin{array}{l} f\ x = 2 * x \\ g\ x = x + 1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} f = \mathsf{succ} \\ g\ x = 2 * x \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} f = \mathsf{succ} \\ g = \mathsf{length} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} g\ (x, y) = x + y \\ f = \mathsf{succ} \cdot (2*) \end{array}\right.$$

   Anime as composições funcionais acima num interpretador de Haskell.

   (b) Mostre que $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$, quaisquer que sejam f, g e h.

   (c) A função $id :: a \rightarrow a$ é tal que $id\ x = x$. Mostre que $f \cdot id = id \cdot f = f$ qualquer que seja f.

2. O diagrama de blocos



descreve o combinador funcional *produto*

$$f \times g = \langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle \tag{F1}$$

que capta a aplicação *paralela* e *independente* de duas funções $A \xrightarrow{f} C$ e $B \xrightarrow{g} D$:

$$\begin{array}{ccc} A & B & A \times B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & {\scriptstyle g}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle f \times g} \\ C & D & C \times D \end{array}$$

   (a) Mostre que $(f \times g)\ (x, y) = (f\ x, g\ y)$.

   (b) Mostre ainda que

$$\pi_1 \cdot (f \times g) = f \cdot \pi_1 \tag{F2}$$

$$\pi_2 \cdot (f \times g) = g \cdot \pi_2 \tag{F3}$$

$$id \times id = id \tag{F4}$$

$$(f \times g) \cdot (h \times k) = f \cdot h \times g \cdot k \tag{F5}$$

   Desenhe os diagramas destas igualdades e anime-as em Haskell, para f, g, h e k à sua escolha.

3. Preencha da forma mais genérica possível os "?" do diagrama
$$\begin{tikzcd} ? & ? \arrow[l, "\langle \pi_2, \pi_1 \rangle"'] & ? \arrow[l, "\langle \pi_2, \pi_1 \rangle"'] \arrow[ll, bend left, "id"] \end{tikzcd}$$

4. Considere as funções seguintes:

$$f = \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_2 \times id \rangle$$
$$g = \langle id \times \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle$$

Identifique os tipos de f e g. Acompanhe a sua resolução com a construção dos respectivos diagramas.

5. Sabe-se que uma dada função g satisfaz a propriedade:

$$(id \times \pi_2) \cdot \langle id \times \pi_2, id \times \pi_1 \rangle \cdot g = id \tag{F6}$$

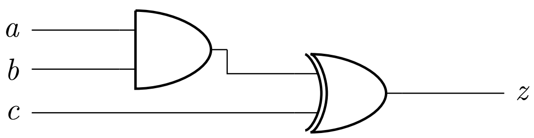
Sem calcular ou conjecturar a sua definição, determine o tipo mais geral de g completando o diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \times (C \times B) \arrow[d, "\langle id \times \pi_2, id \times \pi_1 \rangle"'] & \cdots \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "id"] \\ \cdots \arrow[r, "id \times \pi_2"'] & \cdots \end{tikzcd}$$

6. Apresente definições em Haskell das seguintes funções que estudou em PF:

$\mathsf{uncurry} :: (a \to b \to c) \to (a, b) \to c$ (que emparelha os argumentos de uma função)
$\mathsf{curry} :: ((a, b) \to c) \to a \to b \to c$ (que faz o efeito inverso da anterior)
$\mathit{flip} :: (a \to b \to c) \to b \to a \to c$ (que troca a ordem dos argumentos de uma função)

7. Considere o circuito booleano



que calcula a função $f\ ((a, b), c) = (a \wedge b) \oplus c$, onde $\oplus$ é a operação "exclusive-or".

- Escreva uma definição dessa função $(\mathbb{B} \times \mathbb{B}) \times \mathbb{B} \xrightarrow{f} \mathbb{B}$ que não recorra às variáveis a, b ou c[1] e desenhe o respectivo diagrama.
- Qual é o tipo da função $g = \langle \pi_1, f \rangle$?

[1] Definições de funções que recorrem a variáveis dizem-se "*pointwise*"; as correspondentes versões sem variáveis dizem-se "*point-free*".