Cálculo de Programas

2.º Ano de LEI+MiEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2021/22

Exame da época especial — 26 de Julho de 2022
14h30–16h30 - Sala E2-2.10

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Questão 1 O combinador

$$\begin{array}{l} \mathsf{const} :: a \to b \to a \\ \mathsf{const}\ a\ b = a \end{array}$$

está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos $\mathsf{const}\ k$ por $\underline{k}$, qualquer que seja k. Demonstre a igualdade

$$\underline{(b,a)} \quad = \quad \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \tag{E1}$$

a partir da propriedade universal do produto e das propriedades das funções constantes que constam do formulário.

Questão 2 Considere a função

$$\alpha = \mathsf{swap} \cdot (id \times \mathsf{swap})$$

Calcule o tipo mais geral de α e formule a sua propriedade natural (grátis) a inferir através de um diagrama.

Questão 3 Seja distr a bijecção que estabelece o isomorfismo $A \times (B + C) \cong A \times B + A \times C$. Preencha as reticências no diagrama que se segue por forma a ver nele especificada a bijecção distl que estabelece o isomorfismo $(B + C) \times A \cong B \times A + C \times A$:

$$\begin{tikzcd}
(B+C)\times A \arrow[r, "\mathsf{swap}"] \arrow[rrr, bend right, "\mathsf{distl}"'] & \cdots \arrow[r, "\mathsf{distr}"] & \cdots \arrow[r, "\cdots"] & B\times A + C\times A
\end{tikzcd}$$

Justifique a sua resposta.

Questão 4 Sabendo que as seguintes propriedades são válidas,

$$(p \rightarrow g\ ,\ h) \times f = p \cdot \pi_1 \rightarrow g \times f\ ,\ h \times f \tag{E2}$$

$$[\overline{i_1}\,,\overline{i_2}] = \overline{\mathsf{distl}} \tag{E3}$$

apresente justificações para o cálculo da igualdade

$$\overline{(p \cdot \pi_1)?} = p \rightarrow \overline{i_1}\ ,\ \overline{i_2}$$

que se segue:

$$
\begin{array}{ll}
& \overline{(p \cdot \pi_1)?} = p \rightarrow \overline{i_1}\ ,\ \overline{i_2} \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \overline{(p \cdot \pi_1)?} = \overline{\mathsf{distl}} \cdot p? \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& (p \cdot \pi_1)? = \mathsf{distl} \cdot (p? \times id) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& [i_1 \times id, i_2 \times id] \cdot (p \cdot \pi_1)? = (p? \times id) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& p \cdot \pi_1 \rightarrow (i_1 \times id)\ ,\ (i_2 \times id) = (p? \times id) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& (p \rightarrow i_1\ ,\ i_2) \times id = (p? \times id) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& (p? \times id) = (p? \times id) \\
\Box &
\end{array}
$$

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{array}{ll}
& \overline{(p \cdot \pi_1)?} = p \rightarrow \overline{i_1}\ ,\ \overline{i_2} \\
\equiv & \quad \{ \text{ definição de condicional; (E3) } \} \\
& \overline{(p \cdot \pi_1)?} = \overline{\mathsf{distl}} \cdot p? \\
\equiv & \quad \{ \text{ Fusão-exp; currying é isomorfismo } \} \\
& (p \cdot \pi_1)? = \mathsf{distl} \cdot (p? \times id) \\
\equiv & \quad \{ \ \mathsf{distl}^\circ = \mathsf{undistl}\text{; definição de } \mathsf{undistl} \ \} \\
& [i_1 \times id, i_2 \times id] \cdot (p \cdot \pi_1)? = (p? \times id) \\
\equiv & \quad \{ \text{ definição de condicional; } \} \\
& p \cdot \pi_1 \rightarrow (i_1 \times id)\ ,\ (i_2 \times id) = (p? \times id) \\
\equiv & \quad \{ \text{ (E2) } \} \\
& (p \rightarrow i_1\ ,\ i_2) \times id = (p? \times id) \\
\equiv & \quad \{ \ \} \\
& (p? \times id) = (p? \times id) \\
\Box &
\end{array}
$$

$\Box$

Questão 5 Considere-se a função

$$h = \mathsf{for}\ loop\ (0, 1) \tag{E4}$$

onde $loop\ (a, b) = (b, a + b)$. Sabendo que

$$\mathsf{for}\ g\ i = \llparenthesis\, [\underline{i}\,, g]\, \rrparenthesis \tag{E5}$$

e recorrendo à lei de recursividade mútua, deduza as definições *pointwise* das funções f e g tal que $h = \langle f , g\rangle$.

RESOLUÇÃO: questmpi9899q17 — A seguinte versão linear do algoritmo de Fibonacci,

```
fib n = snd (f n)

f 0     = (0,1)
f (n+1) = let (a,b) = f n
          in (b,a+b)
```

é uma codificação em Haskell cuja função auxiliar f resultou do diagrama que se segue:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[d, "f"'] & 1 + \mathbb{N} \arrow[l, "{[\underline{0}\,, succ]}"'] \arrow[d, "id+f"] \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} & 1 + \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[l, "g"] \end{tikzcd} \tag{E6}$$

Caracterize o “gene” g do catamorfismo em causa. $\square$

Questão 6 Pretendendo-se uma função que conte o número de folhas de uma LTree apareceram duas soluções: uma é o catamorfismo

$$count = \llparenthesis\, [\mathsf{one}\,, \mathsf{add}]\, \rrparenthesis \tag{E7}$$

onde $\mathsf{one} = \underline{1}$ e $\mathsf{add}\ (x, y) = x + y$; a outra,

$$count = \mathsf{length} \cdot tips \tag{E8}$$

baseia-se em duas funções que conhece das bibliotecas e trabalho prático da disciplina.

Recorrendo à lei de fusão dos catamorfismos, entre outras, mostre que as duas propostas (E7) e (E8) são a mesma função.

NB: recorda-se que o functor de base do tipo LTree é $\mathsf{B}\ (f, g) = f + g \times g$; não precisa de provar a propriedade $\mathsf{length}\ (x +\!\!+\, y) = (\mathsf{length}\ x) + (\mathsf{length}\ y)$, se dela precisar.

RESOLUÇÃO: Da biblioteca LTree sabemos que $tips = \llparenthesis\, [\mathsf{singl}\,, \mathsf{conc}]\, \rrparenthesis$, onde $\mathsf{singl}\ a = [a]$ e $\mathsf{conc} = \widehat{+\!\!+}$. Então:

$$\begin{array}{cl} & count = \mathsf{length} \cdot tips \\ \equiv & \qquad \{\ (\mathrm{E7})\ ;\ tips = \llparenthesis\, [\mathsf{singl}\,, \mathsf{conc}]\, \rrparenthesis\ \} \\ & \llparenthesis\, [\mathsf{one}\,, \mathsf{add}]\, \rrparenthesis = \mathsf{length} \cdot \llparenthesis\, [\mathsf{singl}\,, \mathsf{conc}]\, \rrparenthesis \\ \Leftarrow & \qquad \{\ \text{fusão-cata para } \mathsf{F}\ f = \mathsf{B}\ (id, f) = id + f \times f\ \} \\ & \mathsf{length} \cdot [\mathsf{singl}\,, \mathsf{conc}] = [\mathsf{one}\,, \mathsf{add}] \cdot (id + \mathsf{length} \times \mathsf{length}) \end{array}$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ absorção-}+\text{; fusão-}+\text{; Eq-}+ \}$$

$$\begin{cases} \mathsf{length} \cdot \mathsf{singl} = \mathsf{one} \\ \mathsf{length} \cdot \mathsf{conc} = \mathsf{add} \cdot (\mathsf{length} \times \mathsf{length}) \end{cases}$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ introdução de variáveis; } \mathsf{singl}\ x = [\,x\,]\ ;\ \mathsf{conc} = \widehat{+\!\!+};\ (f \times g)\ (x, y) = (f\ x, g\ y)\ \}$$

$$\begin{cases} \mathsf{length}\ [\,a\,] = 1 \\ \mathsf{length}\ (x +\!\!+\, y) = (\mathsf{length}\ x) + (\mathsf{length}\ y) \end{cases}$$

$$\equiv \qquad \{ \ [\,a\,] \text{ só tem um elemento; propriedade dada } \}$$

$$true$$

$\square$

Questão 7 Considere a seguinte função, bem conhecida, escrita em Haskell:

$$\begin{array}{l} \mathsf{zip} :: [\,a\,] \to [\,b\,] \to [\,(a, b)\,] \\ \mathsf{zip}\ (a : as)\ (b : bs) = (a, b) : \mathsf{zip}\ as\ bs \\ \mathsf{zip}\ \_\ \_ = [\,] \end{array}$$

Mostre que $\widehat{\mathsf{zip}} = [\!(g)\!]$, identificando o gene g e representando esse anamorfismo de listas num diagrama.

Questão 8 Demonstre ou refute a seguinte propriedade da composição monádica:

$$(u \cdot f) \bullet (u \cdot g) = u \cdot (f \cdot g)$$

RESOLUÇÃO: Ter-se-á:

$$u \cdot f \bullet u \cdot g = u \cdot (f \cdot g)$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ associatividade (63) } \}$$

$$u \cdot f \bullet u \cdot g = u \cdot (f \cdot g)$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ unidade (62) } \}$$

$$(u \cdot f) \cdot g = u \cdot (f \cdot g)$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ assoc (2) } \}$$

$$u \cdot (f \cdot g) = u \cdot (f \cdot g)$$

$\square$
