Cálculo de Programas

3.º Ano de LEI+MiEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2021/22

Exame da época especial — 19 de Julho de 2022
09h00–11h00 - Sala E1-0.20

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Questão 1 Por inferência de tipos, escolha a função que, de entre as seguintes,

$$f_1 = [id\,, id] \tag{E1}$$
$$f_2 = \langle[\underline{\textsc{True}}\,, \underline{\textsc{False}}], [id\,, id]\rangle \tag{E2}$$
$$f_3 = id + id \tag{E3}$$
$$f_4 = [id\,, \langle\underline{\textsc{True}}, \underline{\textsc{False}}\rangle] \tag{E4}$$

estabelece o isomorfismo

$$2 \times A \quad \cong \quad A + A$$

da direita para a esquerda. Aplique-lhe a *lei da troca* e codifique o resultado em Haskell.

Questão 2 Considere a função

$$\delta = [\mathsf{singl} \cdot i_1\,, \mathsf{map}\ i_2]$$

onde $\mathsf{singl}\ x = [x]$. Infira o tipo mais geral de δ e **formule** a respectiva propriedade natural (grátis) usando o método diagramático ensinado nas aulas.

Questão 3 Definindo $p\ (x, y) = x > y$, o cálculo do máximo $m\ (x, y)$ de dois números pode definir-se por

$$m \quad = \quad p \rightarrow \pi_1\ ,\ \pi_2 \tag{E5}$$

Mostre, usando as leis de fusão do condicional de McCarthy (e propriedades elementares dos números naturais) que

$$\mathsf{succ} \cdot m = m \cdot (\mathsf{succ} \times \mathsf{succ}) \tag{E6}$$

se verifica.

Questão 4 Considere o isomorfismo de ordem superior *flip* definido pela composição de isomorfismos seguinte:

$$\begin{array}{ccccccc} (C^B)^A & \cong & C^{A\times B} & \cong & C^{B\times A} & \cong & (C^A)^B \\ f & \mapsto & \widehat{f} & \mapsto & \widehat{f}.\mathsf{swap} & \mapsto & \overline{\widehat{f}\cdot \mathsf{swap}} = \mathit{flip}\ f \end{array}$$

Mostre que *flip*, acima definida por $\mathit{flip}\ f = \overline{\widehat{f}\cdot \mathsf{swap}}$, é um isomorfismo por ser a sua própria inversa, isto é, por

$$\mathit{flip}\ (\mathit{flip}\ f) = f \tag{E7}$$

se verificar.

Questão 5 Mostre que a propriedade genérica

$$(\!|\, g \,|\!) \cdot (\!|\, \mathsf{in} \cdot k \,|\!) = (\!|\, g \cdot m \,|\!) \tag{E8}$$

se verifica desde que

$$m \cdot \mathsf{F}\, f = \mathsf{F}\, f \cdot k \tag{E9}$$

se verifique também.

Questão 6 Considere-se a função $h = \mathsf{for}\ \mathsf{swap}\ (0,1)$. Sabendo que $\mathsf{for}\ g\ i = (\!|\, [\underline{i}\,, g] \,|\!)$ e recorrendo à lei de recursividade mútua, deduza as definições *pointwise* das funções f e g tal que $h = \langle f, g\rangle$.

Questão 7 Considere a função:

$$x \ominus y = \mathbf{if}\ x \leqslant y\ \mathbf{then}\ 0\ \mathbf{else}\ 1 + x \ominus (y+1)$$

Quais os valores das expressões $(3 \ominus 2) \ominus 3$ e $(3 \ominus 4) + 4$?

Codifique $\widehat{\ominus} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ como um anamorfismo de naturais e faça o respectivo diagrama.

Questão 8 Pretende-se um mónade que consiga calcular o tempo de execução de programas funcionais de forma composicional. Para isso, define-se

$$\mathsf{T}\ X = X \times \mathbb{R}$$

onde cada par (x, t) de $\mathsf{T}\ X$ regista o facto de o valor x ter sido obtido à custa de t unidades de tempo (e.g. milisegundos).[1] De seguida, define-se o mónade $X \xrightarrow{u} \mathsf{T}X \xleftarrow{\mu} \mathsf{T}^2X$:

$$\mathsf{T}\, f = f \times id \tag{E10}$$

$$u\ x = (x, 0) \tag{E11}$$

$$\mu\ ((x, t_1), t_2) = (x, t_1 + t_2) \tag{E12}$$

em que se vê bem como a multiplicação faz a adição dos tempos de execução.

Contudo, para T ser um mónade terá — como sabe — de satisfizer as leis

$$\mu \cdot \mu = \mu \cdot \mathsf{T}\ \mu \tag{E13}$$

$$\mu \cdot u = \mu \cdot \mathsf{T}\ u = id \tag{E14}$$

Prove que assim acontece.

---

[1] Assim, por exemplo, executar $\mathbf{do}\ \{p \leftarrow h\ x; \mathbf{if}\ p\ \mathbf{then}\ f\ x\ \mathbf{else}\ g\ x\}$ irá dar o resultado da expressão condicional e, simultaneamente, o tempo de execução de $h\ x$ adicionado ao de $f\ x$ ou de $g\ x$, conforme determinado por $h\ x$.