Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2021/22

Exame de Recurso — 22 de Junho de 2022
11h30–13h30 - Sala E2-0.20

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Questão 1 Considere as funções seguintes:

$$f = \langle id \times \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle$$
$$g = \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_2 \times id \rangle$$

Identifique os tipos de f e g e demonstre que $f \cdot g = id$. Acompanhe a sua resolução com a construção dos respectivos diagramas.

Questão 2 Identifique, apoiando a sua resolução num diagrama, qual é a definição da função polimórfica α cuja propriedade natural ("grátis") é

$$(f + h) \cdot \alpha \quad = \quad \alpha \cdot (f + g \times h)$$

Questão 3 Demonstre a lei do condicional

$$p \rightarrow (q \rightarrow c\ ,\ d)\ ,\ c \quad = \quad (p \Rightarrow q) \rightarrow c\ ,\ d$$

sabendo que

$$(p \Rightarrow q)? \quad = \quad p \rightarrow q?\ ,\ i_1 \tag{E1}$$

é uma propriedade da implicação de predicados.

Questão 4 Repare que as projecções $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ são funções binárias e como tal podem ser "curried", $A^B \xleftarrow{\overline{\pi_1}} A \xrightarrow{\overline{\pi_2}} B^B$. Verifica-se que:

$$\overline{\pi_1} = \mathsf{const} \tag{E2}$$
$$\overline{\pi_2} = \underline{id} \tag{E3}$$

onde $\mathsf{const}\ a = \underline{a}$, a função constante que dá a como resultado. Apresente justificações para os passos das provas respectivas que se seguem:

$$
\begin{array}{cl}
& \overline{\pi_1} = \mathsf{const} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathsf{ap} \cdot (\mathsf{const} \times id) = \pi_1 \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (\mathsf{ap} \cdot (\mathsf{const} \times id))\ (a, b) = \pi_1\ (a, b) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathsf{ap}\ (\mathsf{const}\ a, b) = a \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathsf{const}\ a\ b = a \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \underline{a}\ b = a \\
\Box &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cl}
& \overline{\pi_2} = \underline{id} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathsf{ap} \cdot (\underline{id} \times id) = \pi_2 \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathsf{ap}\ ((\underline{id} \times id)\ (a, b)) = b \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathsf{ap}\ (id, b) = b \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& b = b \\
\Box &
\end{array}
$$

Questão 5 Recorde o tipo das árvores binárias com informação de tipo A nos nós:

$$\mathsf{T} = \mathsf{BTree}\ A \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = 1 + A \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f^2 \end{array} \right. \qquad \mathsf{in} = [\underline{Empty}, Node]$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{BTree}\ a = Empty \mid Node\ (a, (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a))$

A função

$$\mathsf{mirror} = (\!|\ \mathsf{in} \cdot (id + id \times \mathsf{swap})\ |\!) \tag{E4}$$

pode converter-se no anamorfismo

$$\mathsf{mirror} = [\!(\alpha \cdot \mathsf{out})\!] \tag{E5}$$

para um dado α (NB: $\mathsf{out} = \mathsf{in}^\circ$). Calcule α.

Questão 6 As funções seguintes geram sequências de 0 e 1 alternados ("tic-tac"s de relógio):

$$
\begin{array}{l}
tic\ 0 = [\,] \\
tic\ (n+1) = 1 : tac\ n \\
tac\ 0 = [\,] \\
tac\ (n+1) = 0 : tic\ n
\end{array}
$$

Mostre, recorrendo à lei de recursividade mútua, que $tic = \pi_1 \cdot aux$ e $tac = \pi_2 \cdot aux$ para

$$
\begin{array}{l}
aux = \mathsf{for}\ loop\ start\ \mathbf{where} \\
\quad start = ([\,], [\,]) \\
\quad loop\ (tic, tac) = (1 : tac, 0 : tic)
\end{array}
$$

Questão 7 Considere o tipo indutivo

$$\mathbf{data}\ \mathsf{FTree}\ a\ c = Unit\ c \mid Comp\ a\ (\mathsf{FTree}\ a\ c, \mathsf{FTree}\ a\ c)$$

para o qual se definem:

$$inFTree = [Unit\,,\widehat{Comp}]$$
$$\mathsf{F}\,f = id + id \times f^2$$

Identifique o gene g do catamorfismo

$$contagem = (\!|\,g\,|\!)$$

sobre árvores deste tipo que deverá dar como resultado a soma do número de folhas com o número de nós da árvore argumento, e derive uma versão *pointwise* dessa função.

Questão 8 Sempre que um functor T é um mónade tem-se:

$$\mathsf{T}\,f = (u \cdot f) \bullet id$$

Definindo-se

$$\theta\ b = \mathsf{T}\ \langle \underline{b}, id\rangle$$

- Mostre que

$$\theta\ b\ x = \mathbf{do}\ \{\, a \leftarrow x; \mathsf{return}\ (b, a) \}$$

- O que faz o operador θ? Diga-o sumariamente por palavras suas.
