Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2021/22

Teste — 1 de Junho de 2022
9h00–11h00 - Salas E1-2.05, E1-2.07 e E1-2.11

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Questão 1 Recorde as funções elementares

$$\begin{array}{l} join = [id\,, id] \\ dup = \langle id, id \rangle \end{array}$$

que respectivamente juntam ou duplicam informação.

Calcule (justificando) a propriedade grátis da função $\alpha = dup \cdot join$ e indique por que razão não pode calcular essa propriedade para $join \cdot dup$.

Questão 2 Use a lei da troca para resolver em ordem a f e g a equação:

$$[f\,, g] = \langle \pi_1 + id, \pi_2 + id \rangle \tag{E1}$$

Questão 3 Numa das fichas das aulas práticas desta disciplina provou-se a igualdade:

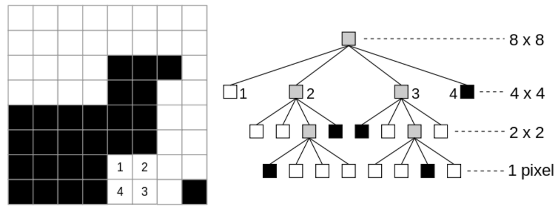
$$\overline{f \cdot (g \times h)} = \overline{\mathsf{ap} \cdot (id \times h)} \cdot \overline{f} \cdot g \tag{E2}$$

Mostre que a lei de fusão da exponenciação é um caso particular de (**??**).

Questão 4 Mostre que a lei da recursividade mútua generaliza a mais do que duas funções, neste caso três:

$$\left\{ \begin{array}{l} f \cdot \mathsf{in} = h \cdot \mathsf{F}\ \langle \langle f, g \rangle, j \rangle \\ g \cdot \mathsf{in} = k \cdot \mathsf{F}\ \langle \langle f, g \rangle, j \rangle \\ j \cdot \mathsf{in} = l \cdot \mathsf{F}\ \langle \langle f, g \rangle, j \rangle \end{array} \right. \quad \equiv \quad \langle \langle f, g \rangle, j \rangle = (\!|\, \langle \langle h, k \rangle, l \rangle \,|\!) \tag{E3}$$

Questão 5 A figura abaixo



(fonte: Wikipedia) mostra como se representa uma imagem (neste caso a preto e branco) sob a forma de uma árvore quaternária (vulg. *quadtree*) por sucessivas divisões do espaço 2D em quatro regiões, até se chegar à resolução de um pixel.

Seja dada a seguinte definição em Haskell de uma *quadtree*:

$$\mathbf{data}\ \mathsf{QTree}\ a = \mathit{Pixel}\ a \mid \mathit{Blocks}\ (\mathsf{QTree}\ a)\ (\mathsf{QTree}\ a)\ (\mathsf{QTree}\ a)\ (\mathsf{QTree}\ a)$$

Tendo sido escolhido para este tipo o functor de base

$$\mathsf{B}\ (X, Y) = X + Y^2 \times Y^2 \tag{E4}$$

onde Y^2 abrevia $Y \times Y$, como habitualmente, defina as habituais funções de construção e decomposição deste tipo, cf.:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{QTree}\ A \arrow[rr, bend left, "\mathsf{out}_{\mathsf{QTree}}"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & \mathsf{B}\ (A, \mathsf{QTree}\ A) \arrow[ll, bend left, "\mathsf{in}_{\mathsf{QTree}}"] \end{tikzcd}$$

Justifique a sua resposta.

Questão 6 A função $\mathit{takeWhile}\ p$ é uma função standard em Haskell que copia para a saída os elementos da lista de entrada até aparecer um que não valida a condição p:

$$\mathit{takeWhile}\ p = (\!|\, [\mathsf{nil}, ((\widetilde{p} \cdot \pi_1) \rightarrow \mathsf{nil}\ ,\ \mathsf{cons})]\, |\!) \tag{E5}$$

Nesta definição, $\widetilde{p}$ designa a negação de p,

$$\widetilde{p} = (\neg) \cdot p \tag{E6}$$

isto é, $\widetilde{p}\ x = \neg\ (p\ x)$.

O facto seguinte mostra que um $\mathit{takeWhile}$ após um map é igual a um map após um $\mathit{takeWhile}$:

$$\mathsf{map}\ f \cdot \mathit{takeWhile}\ (p \cdot f) = \mathit{takeWhile}\ p \cdot \mathsf{map}\ f \tag{E7}$$

Apresente justificações para os passos do seguinte cálculo de (**??**):

$$\begin{array}{cl}
& \mathsf{map}\ f \cdot \mathit{takeWhile}\ (p \cdot f) = \mathit{takeWhile}\ p \cdot \mathsf{map}\ f \\
\equiv & \quad \{\ \textbf{(??)}\ \text{duas vezes, abreviando}\ (\widetilde{p} \cdot \pi_1 \rightarrow \mathsf{nil}\ ,\ \mathsf{cons})\ \text{para}\ \alpha_p\ \} \\
& \mathsf{map}\ f \cdot (\!|\, [\mathsf{nil}, \alpha_{p \cdot f}]\, |\!) = (\!|\, [\mathsf{nil}, \alpha_p]\, |\!) \cdot \mathsf{map}\ f \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \mathsf{map}\ f \cdot (\!|\, [\mathsf{nil}, \alpha_{p \cdot f}]\, |\!) = (\!|\, [\mathsf{nil}, \alpha_p] \cdot (id + f \times id)\, |\!) \\
\Leftarrow & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \mathsf{map}\ f \cdot [\mathsf{nil}, \alpha_{p \cdot f}] = [\mathsf{nil}, \alpha_p \cdot (f \times id)] \cdot (id + id \times \mathsf{map}\ f) \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}
\end{array}$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\mathsf{map}\ f \cdot \mathsf{nil} = \mathsf{nil} \\
\mathsf{map}\ f \cdot \alpha_{p \cdot f} = \alpha_p\ (f \times \mathsf{map}\ f)
\end{array}
\right.
$$

$\equiv \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$

$$\mathsf{map}\ f \cdot (\widetilde{p \cdot f} \cdot \pi_1 \rightarrow \mathsf{nil}\ ,\ \mathsf{cons}) = (\widetilde{p} \cdot \pi_1 \rightarrow \mathsf{nil}\ ,\ \mathsf{cons}) \cdot (f \times \mathsf{map}\ f)$$

$\equiv \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$

$$\widetilde{p \cdot f} \cdot \pi_1 \rightarrow \mathsf{nil}\ ,\ (\mathsf{map}\ f \cdot \mathsf{cons}) = \widetilde{p} \cdot f \cdot \pi_1 \rightarrow \mathsf{nil}\ ,\ \mathsf{cons} \cdot (f \times \mathsf{map}\ f)$$

$\equiv \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$

$$\widetilde{p \cdot f} \cdot \pi_1 \rightarrow \mathsf{nil}\ ,\ \mathsf{cons} \cdot (f \times \mathsf{map}\ f) = \widetilde{p} \cdot f \cdot \pi_1 \rightarrow \mathsf{nil}\ ,\ \mathsf{cons} \cdot (f \times \mathsf{map}\ f)$$

$\Leftarrow \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$

$$\widetilde{p \cdot f} = \widetilde{p} \cdot f$$

$\equiv \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$

TRUE

$\square$

Questão 7 Uma técnica de compressão de informação consiste em substituir informação repetida por pares (x, n) onde x é o elemento que se repete e n é o número de repetições. Por exemplo, $compress\ [0, 0, 1, 1, 1, 1, 0] = [(0, 2), (1, 4), (0, 1)]$. A função inversa, $expand$, reconstitui a informação original, e.g. $expand\ [(1, 2), (3, 4)] = [1, 1, 3, 3, 3, 3]$, etc. Complete a seguinte definição de $expand$,

$$expand = \mathsf{concat} \cdot \mathsf{map}\ [\![g]\!]\ \mathbf{where}\ g = \ldots$$

determinando o gene g do anamorfismo que nela ocorre. Justifique a sua resposta fazendo um diagrama desse anamorfismo.

Questão 8 Sendo dado um mónade $A \xrightarrow{u} \mathsf{T}A \xleftarrow{\mu} \mathsf{T}^2 A$, mostre que μ pode ser definida das seguintes formas, uma *pointfree*,

$$\mu = id \bullet id \tag{E8}$$

e outra *pointwise*:

$$\mu\ x = \mathbf{do}\ \{ y \leftarrow x; y \} \tag{E9}$$

NB: por motivos óbvios, não pode usar a lei "μ **versus** $\bullet$" do formulário.
