Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2021/22

Teste — 1 de Junho de 2022
09h00–11h00 - Salas E1-2.05, E1-2.07 e E1-2.11

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Questão 1 Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} (A \times B) \times C \arrow[rr, bend left, "\mathsf{assocr}"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & A \times (B \times C) \arrow[ll, bend left, "\mathsf{assocl}"] \end{tikzcd}$$

onde $\mathsf{assocr} = \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_2 \times id \rangle$ e $\mathsf{assocl} = \langle id \times \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle$ Mostre que

$$\mathsf{assocl} \cdot \mathsf{assocr} \quad = \quad id$$

se verifica.

Questão 2 Infira a propriedade grátis da função $\alpha = i_1 \cdot \pi_1$ e mostre que não faz sentido calcular a mesma propriedade se se trocar a ordem da composição de i_1 com π_1.

Questão 3 Prove a igualdade $\overline{f \cdot (g \times h)} = \overline{\mathsf{ap} \cdot (id \times h)} \cdot \overline{f} \cdot g$ usando as leis das exponenciais e dos produtos.

Questão 4 Converta o catamorfismo de listas

$$\mathsf{join}\ p = (\!|\, [\mathsf{nil}\,, aug\ p]\, |\!)\ \textbf{where}\ aug\ p = p \cdot \mathsf{cons} \rightarrow \mathsf{cons}, \pi_2$$

para notação Haskell com variáveis e indique por palavras suas o que faz a função join.

Questão 5 A função seguinte, em Haskell

$$sumprod\ a\ [\,] = 0$$
$$sumprod\ a\ (h : t) = a * h + sumprod\ a\ t$$

é o catamorfismo de listas

$$sumprod\ a \quad = \quad (\!|\, [\mathsf{zero}\,, \mathsf{add} \cdot ((a*) \times id)] \,|\!) \tag{E1}$$

onde $\mathsf{zero} = \underline{0}$ e $\mathsf{add}\ (x, y) = x + y$. Mostre, como exemplo de aplicação da propriedade de **fusão-cata** para listas, que

$$sumprod\ a \quad = \quad (a*) \cdot \mathsf{sum} \tag{E2}$$

onde $\mathsf{sum} = (\!|\, [\mathsf{zero}\,, \mathsf{add}] \,|\!)$. **NB:** não ignore propriedades elementares da aritmética que lhe possam ser úteis.

Questão 6 O número de movimentos que solucionam o "puzzle" das Torres de Hanoi, com n discos, é dado por

$$k\ n = 2^n - 1$$

Mostre (recorrendo à lei de recursividade mútua) que uma forma de calcular k é

$$k = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ (0, 1)\ \mathbf{where}\ loop\ (k, e) = (k + e, 2 * e)$$

sabendo que: (a) $2^n = \mathsf{for}\ (2*)\ 1\ n$; (b) k satisfaz as equações

$$k\ 0 = 0$$
$$k\ (n + 1) = 2^n + k\ n$$

(como facilmente se prova).

Questão 7 Apresente as justificações para o cálculo (que se segue) da simplificação de um hilomorfismo cuja base é o bifunctor $\mathsf{B}\ (X, Y) = \mathsf{G}\ (X \times Y)$, para um dado G:

$$\begin{array}{ll}
 & f = (\!|\, g \,|\!) \cdot [\!(\mathsf{G}\ \langle id, id\rangle \cdot \mathsf{out})\!] \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & f = g \cdot \mathsf{F}\ f \cdot \mathsf{G}\ \langle id, id\rangle \cdot \mathsf{out} \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & f \cdot \mathsf{in} = g \cdot \mathsf{G}\ (id \times f) \cdot \mathsf{G}\ \langle id, id\rangle \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & f \cdot \mathsf{in} = g \cdot \mathsf{G}\ \langle id, f\rangle \\
\Box &
\end{array}$$

Valorização: Faça um diagrama deste hilomorfismo genérico e instancie-o para a função factorial.

Questão 8 Demonstre a seguinte propriedade da composição monádica:

$$f \bullet [g\,, h] = [f \bullet g\,, f \bullet h] \tag{E3}$$
