Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2020/21 - Ficha nr.° 7

1. As seguintes funções mutuamente recursivas testam a paridade de um número natural:

$$\begin{cases} impar\ 0 = \mathsf{False} \\ impar\ (n+1) = par\ n \end{cases} \qquad \begin{cases} par\ 0 = \mathsf{True} \\ par\ (n+1) = impar\ n \end{cases}$$

   Assumindo o functor $\mathsf{F}\ f = id + f$, mostre que esse par de definições é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{cases} impar \cdot \mathsf{in} = h \cdot \mathsf{F}\ \langle impar, par \rangle \\ par \cdot \mathsf{in} = k \cdot \mathsf{F}\ \langle impar, par \rangle \end{cases}$$

   para um dado h e k (deduza-os). De seguida, recorra às leis da recursividade mútua e da troca para mostrar que

$$imparpar = \langle impar, par \rangle = \mathsf{for\ swap}\ (\mathsf{False}, \mathsf{True})$$

2. A seguinte função em Haskell calcula a lista dos primeiros n números naturais por ordem inversa:

$$\begin{array}{l} insg\ 0 = [\,] \\ insg\ (n+1) = (n+1) : insg\ n \end{array}$$

   Mostre que $insg$ pode ser definida por recursividade mútua tal como se segue,

$$\begin{array}{l} insg\ 0 = [\,] \\ insg\ (n+1) = (fsuc\ n) : insg\ n \\ fsuc\ 0 = 1 \\ fsuc\ (n+1) = fsuc\ n + 1 \end{array}$$

   e, usando a lei de recursividade mútua, derive:

$$\begin{array}{l} insg = \pi_2 \cdot insgfor \\ insgfor = \mathsf{for}\ \langle (1+) \cdot \pi_1, \mathsf{cons} \rangle\ (1, [\,]) \end{array}$$

3. Considere o par de funções mutuamente recursivas

$$\begin{cases} f_1\ [\,] = [\,] \\ f_1\ (h : t) = h : (f_2\ t) \end{cases} \qquad \begin{cases} f_2\ [\,] = [\,] \\ f_2\ (h : t) = f_1\ t \end{cases}$$

   Use a lei de recursividade mútua para definir $\langle f_1, f_2 \rangle$ como um catamorfismo de listas (onde o functor de trabalho é $\mathsf{F}\ f = id + id \times f$) e desenhe o respectivo diagrama. Que faz cada uma destas funções f_1 e f_2?

4. Mostre que a lei da recursividade mútua generaliza a mais do que duas funções, neste caso três:

$$\left\{ \begin{array}{l} f \cdot in = h \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j \rangle \rangle \\ g \cdot in = k \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j \rangle \rangle \\ j \cdot in = l \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j \rangle \rangle \end{array} \right. \quad \equiv \quad \langle f, \langle g, j \rangle \rangle = (\!|\, \langle h, \langle k, l \rangle \rangle \,|\!) \tag{F1}$$

5. Sejam dados os functores elementares seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\,X = \mathbb{Z} \\ \mathsf{F}\,f = id \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{G}\,X = X \\ \mathsf{G}\,f = f \end{array} \right.$$

Calcule $\mathsf{H}\,f$ e $\mathsf{K}\,f$ para

$$\mathsf{H}\,X = \mathsf{F}\,X + \mathsf{G}\,X \quad \text{e} \quad \mathsf{K}\,X = \mathsf{G}\,X \times \mathsf{F}\,X$$

6. Mostre que, se F e G são functores, então também o serão $\mathsf{F} + \mathsf{G}$, $\mathsf{F} \times \mathsf{G}$ e $\mathsf{F} \cdot \mathsf{G}$ que a seguir se definem:

$$\begin{array}{l} (\mathsf{F} + \mathsf{G})\,X = (\mathsf{F}\,X) + (\mathsf{G}\,X) \\ (\mathsf{F} \times \mathsf{G})\,X = (\mathsf{F}\,X) \times (\mathsf{G}\,X) \\ (\mathsf{F} \cdot \mathsf{G})\,X = \mathsf{F}\,(\mathsf{G}\,X) \end{array}$$

7. Considere o functor

$$\begin{array}{l} \mathsf{T}\,X = X \times X \\ \mathsf{T}\,f = f \times f \end{array}$$

e as funções

$$\begin{array}{l} \mu = \pi_1 \times \pi_2 \\ u = \langle id, id \rangle. \end{array}$$

Mostre que a propriedade $\mu \cdot \mathsf{T}\,u = id = \mu \cdot u$ se verifica.

8. Considere a função

$$\begin{array}{l} \mathsf{mirror}\,(\mathit{Leaf}\;a) = \mathit{Leaf}\;a \\ \mathsf{mirror}\,(\mathit{Fork}\,(x, y)) = \mathit{Fork}\,(\mathsf{mirror}\,y, \mathsf{mirror}\,x) \end{array}$$

que "espelha" árvores binárias do tipo LTree (ver fichas anteriores). Comece por mostrar que

$$\mathsf{mirror} = (\!|\, \mathsf{in} \cdot (id + \mathsf{swap}) \,|\!) \tag{F2}$$

desenhando o digrama que representa este catamorfismo.

Tal como swap, mirror é um isomorfismo de árvores pois é a sua própria inversa:

$$\mathsf{mirror} \cdot \mathsf{mirror} = id \tag{F3}$$

Complete a seguinte demonstração de (F3):

$$\begin{array}{cl} & \mathsf{mirror} \cdot \mathsf{mirror} = id \\ \equiv & \quad \{ \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; \} \\ & \mathsf{mirror} \cdot (\!|\, \mathsf{in} \cdot (id + \mathsf{swap}) \,|\!) = (\!|\, \mathsf{in} \,|\!) \\ \Leftarrow & \quad \{ \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; \} \\ & \mathsf{mirror} \cdot \ldots = \ldots \\ \ldots & \quad \{ \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; \} \\ & (etc) \end{array}$$