

Cálculo de Programas

2.º ano

Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2020/21 - Ficha nr.º 4

1. Recorde a função

$$\begin{aligned} \text{ap} &: (C^B \times B) \rightarrow C \\ \text{ap}(f, x) &= f\ x \end{aligned}$$

(a) Mostre, através da adição de variáveis, que a função f definida a seguir

$$f\ k = \text{ap} \cdot (k \times \text{id})$$

é a função

$$\begin{aligned} \text{uncurry} &:: (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow (a, b) \rightarrow c \\ \text{uncurry}\ f &(a, b) = f\ a\ b \end{aligned}$$

disponível em Haskell.

(b) Mostre que a igualdade

$$\text{ap} \cdot (\text{curry}\ f \times \text{id}) = f \tag{F1}$$

corresponde à definição $\text{curry}\ f\ a\ b = f\ (a, b)$ da função $\text{curry} :: ((a, b) \rightarrow c) \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c$ também disponível em Haskell.

2. Abreviando $\text{curry}\ f$ por \bar{f} , identifique a propriedade (F1) no formulário e diga como a deriva da propriedade universal da exponenciação, que a seguir se descreve através de um diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C^B & C^B \times B \xrightarrow{\text{ap}} C & k = \bar{f} \equiv \text{ap} \cdot (k \times \text{id}) = f \\ \uparrow k & \uparrow k \times \text{id} \nearrow f & \\ A & A \times B & \end{array}$$

3. Considere o isomorfismo de ordem superior flip definido pela composição de isomorfismos seguinte:

$$\begin{aligned} (C^B)^A &\cong C^{A \times B} \cong C^{B \times A} \cong (C^A)^B \\ f &\mapsto \hat{f} \mapsto \hat{f} \cdot \text{swap} \mapsto \overline{\hat{f} \cdot \text{swap}} = \text{flip}\ f \end{aligned}$$

- Mostre que flip , acima definida por $\text{flip}\ f = \overline{\hat{f} \cdot \text{swap}}$, é um isomorfismo por ser a sua própria inversa, isto é, por

$$\text{flip}(\text{flip}\ f) = f \tag{F2}$$

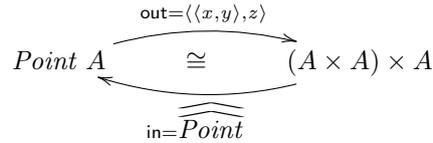
se verificar.

- Mostre ainda que $flip\ f\ x\ y = f\ y\ x$.

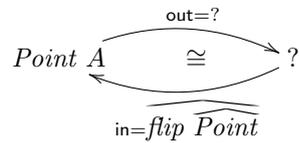
4. Considere a seguinte definição, em Haskell, de um tipo para descrever pontos no espaço tridimensional:

```
data Point a = Point { x :: a, y :: a, z :: a } deriving (Eq, Show)
```

Considere a seguinte formulação da correspondência entre a sintaxe concreta acima, em Haskell, e a correspondente sintaxe abstracta



onde \hat{f} abrevia $\text{uncurry } f$. Preencha os “?” na seguinte alternativa à situação anterior:



NB: peça ajuda ao GHCi na inferência dos tipos em causa.

5. Provar a igualdade $\overline{f \cdot (g \times h)} = \overline{\text{ap} \cdot (\text{id} \times h)} \cdot \bar{f} \cdot g$ usando as leis das exponenciais e dos produtos.
6. Considere o isomorfismo

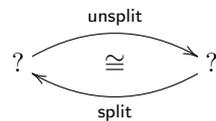


onde

$$\begin{aligned}
 \text{join } (f, g) &= [f, g] \\
 \text{unjoin } k &= (k \cdot i_1, k \cdot i_2)
 \end{aligned}$$

Mostre que $\text{join} \cdot \text{unjoin} = \text{id}$ e que $\text{unjoin} \cdot \text{join} = \text{id}$.

7. Complete os “?” do diagrama



onde

$$\begin{aligned}
 \text{split } (f, g) &= \langle f, g \rangle \\
 \text{unsplit } k &= (\pi_1 \cdot k, \pi_2 \cdot k)
 \end{aligned}$$