Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2020/21 - Ficha nr.° 4

1. Recorde a função

$$\begin{array}{l} \mathsf{ap} : (C^B \times B) \to C \\ \mathsf{ap}\ (f, x) = f\ x \end{array}$$

   (a) Mostre, através da adição de variáveis, que a função f definida a seguir

   $$f\ k = \mathsf{ap} \cdot (k \times id)$$

   é a função

   $$\begin{array}{l} \mathsf{uncurry} :: (a \to b \to c) \to (a, b) \to c \\ \mathsf{uncurry}\ f\ (a, b) = f\ a\ b \end{array}$$

   disponível em Haskell.

   (b) Mostre que a igualdade

   $$\mathsf{ap} \cdot (\mathsf{curry}\ f \times id) = f \qquad \text{(F1)}$$

   corresponde à definição $\mathsf{curry}\ f\ a\ b = f\ (a, b)$ da função $\mathsf{curry} :: ((a, b) \to c) \to a \to b \to c$ também disponível em Haskell.

2. Abreviando $\mathsf{curry}\ f$ por $\overline{f}$, identifique a propriedade (F1) no formulário e diga como a deriva da propriedade universal da exponenciação, que a seguir se descreve através de um diagrama:

$$\begin{tikzcd} C^B & C^B \times B \arrow[r, "ap"] & C \\ A \arrow[u, "k"] & A \times B \arrow[u, "k \times id"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad k = \overline{f} \ \equiv\ \mathsf{ap} \cdot (k \times id) = f$$

3. Considere o isomorfismo de ordem superior *flip* definido pela composição de isomorfismos seguinte:

$$\begin{array}{ccccccc} (C^B)^A & \cong & C^{A \times B} & \cong & C^{B \times A} & \cong & (C^A)^B \\ f & \mapsto & \widehat{f} & \mapsto & \widehat{f}.\mathsf{swap} & \mapsto & \overline{\widehat{f} \cdot \mathsf{swap}} = \mathit{flip}\ f \end{array}$$

   - Mostre que *flip*, acima definida por $\mathit{flip}\ f = \overline{\widehat{f} \cdot \mathsf{swap}}$, é um isomorfismo por ser a sua própria inversa, isto é, por

   $$\mathit{flip}\ (\mathit{flip}\ f) = f \qquad \text{(F2)}$$

   se verificar.

- Mostre ainda que $\mathit{flip}\ f\ x\ y = f\ y\ x$.

4. Considere a seguinte definição, em Haskell, de um tipo para descrever pontos no espaço tridimensional:

$$\mathbf{data}\ \mathit{Point}\ a = \mathit{Point}\ \{x :: a, y :: a, z :: a\}\ \mathbf{deriving}\ (\mathit{Eq}, \mathit{Show})$$

Considere a seguinte formulação da correspondência entre a sintaxe concreta acima, em Haskell, e a correspondente sintaxe abstracta

$$\begin{tikzcd} \mathit{Point}\ A \arrow[r, bend left, "\mathsf{out} = \langle \langle x, y\rangle, z\rangle"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & (A \times A) \times A \arrow[l, bend left, "\mathsf{in} = \widehat{\mathit{Point}}"] \end{tikzcd}$$

onde $\widehat{f}$ abrevia $\mathsf{uncurry}\ f$. Preencha os "?" na seguinte alternativa à situação anterior:

$$\begin{tikzcd} \mathit{Point}\ A \arrow[r, bend left, "\mathsf{out} = ?"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & ? \arrow[l, bend left, "\mathsf{in} = \widehat{\mathit{flip}\ \widehat{\mathit{Point}}}"] \end{tikzcd}$$

NB: peça ajuda ao GHCi na inferência dos tipos em causa.

5. Provar a igualdade $\overline{f \cdot (g \times h)} = \overline{\mathsf{ap} \cdot (id \times h)} \cdot \overline{f} \cdot g$ usando as leis das exponenciais e dos produtos.

6. Considere o isomorfismo

$$\begin{tikzcd} A^{B+C} \arrow[r, bend left, "\mathsf{unjoin}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & A^B \times A^C \arrow[l, bend left, "\mathsf{join}"] \end{tikzcd} \tag{F3}$$

onde

$\mathsf{join}\ (f, g) = [f\ , g]$
$\mathsf{unjoin}\ k = (k \cdot i_1, k \cdot i_2)$

Mostre que $\mathsf{join} \cdot \mathsf{unjoin} = id$ e que $\mathsf{unjoin} \cdot \mathsf{join} = id$.

7. Complete os "?"do diagrama

$$\begin{tikzcd} ? \arrow[r, bend left, "\mathsf{unsplit}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & ? \arrow[l, bend left, "\mathsf{split}"] \end{tikzcd}$$

onde

$\mathsf{split}\ (f, g) = \langle f, g\rangle$
$\mathsf{unsplit}\ k = (\pi_1 \cdot k, \pi_2 \cdot k)$