Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2020/21 - Ficha nr.° 3

1. Considere o isomorfismo

$$
\begin{tikzcd}
(A+B)+C \arrow[rr, bend left, "\mathsf{coassocr}"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & A+(B+C) \arrow[ll, bend left, "\mathsf{coassocl}"]
\end{tikzcd}
$$

onde $\mathsf{coassocr} = [id + i_1\, , i_2 \cdot i_2]$. Calcule a sua conversa resolvendo em ordem a $\mathsf{coassocl}$ a equação,

$$\mathsf{coassocl} \cdot \mathsf{coassocr} \quad = \quad id$$

isto é

$$\mathsf{coassocl} \cdot \underbrace{[id + i_1\, , i_2 \cdot i_2]}_{\mathsf{coassocr}} = id$$

etc. Finalmente, exprima $\mathsf{coassocl}$ sob a forma de um programa em Haskell *não recorra* ao combinador "either".

2. O combinador

$$\mathsf{const} :: a \to b \to a$$
$$\mathsf{const}\ a\ b = a$$

está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos $\mathsf{const}\ k$ por $\underline{k}$, qualquer que seja k. Demonstre a igualdade

$$\underline{(b, a)} \quad = \quad \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \tag{F1}$$

a partir da propriedade universal do produto e das propriedades das funções constantes que constam do formulário.

3. Sabendo que uma dada função xr satisfaz a propriedade

$$\mathsf{xr} \cdot \langle\langle f, g\rangle, h\rangle = \langle\langle f, h\rangle, g\rangle \tag{F2}$$

para todo o f, g e h, derivar de (F2) a definição de xr:

$$\mathsf{xr} = \langle \pi_1 \times id, \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle \tag{F3}$$

4. Use a lei da troca para exprimir o isomorfismo $\mathsf{undistl} = [i_1 \times id\, , i_2 \times id]$ sob a forma de um 'split' de alternativas.

5. No Cálculo de Programas, as definições condicionais do tipo $h\ x = \textbf{if}\ p\ x\ \textbf{then}\ f\ x\ \textbf{else}\ g\ x$ são escritas usando o combinador ternário $p \rightarrow f\ ,\ g$ conhecido pelo nome de *condicional de McCarthy*, cuja definição

$$p \rightarrow f\ ,\ g \quad = \quad [f\,, g] \cdot p?$$

vem no formulário. Baseando-se em leis deste combinador que constam também do formulário, demostre a chamada 2ª-lei do condicional de McCarthy:

$$(p \rightarrow f\ ,\ g) \cdot h \quad = \quad (p \cdot h) \rightarrow (f \cdot h), (g \cdot h)$$

6. Sabendo que as igualdades

$$p \rightarrow k\ ,\ k\ =\ k \tag{F4}$$

$$(p? + p?) \cdot p?\ =\ (i_1 + i_2) \cdot p? \tag{F5}$$

se verificam, demonstre as seguintes propriedades do mesmo combinador:

$$\langle (p \rightarrow f\ ,\ h), (p \rightarrow g\ ,\ i) \rangle\ =\ p \rightarrow \langle f, g \rangle\ ,\ \langle h, i \rangle \tag{F6}$$

$$\langle f, (p \rightarrow g\ ,\ h) \rangle\ =\ p \rightarrow \langle f, g \rangle\ ,\ \langle f, h \rangle \tag{F7}$$

$$p \rightarrow (p \rightarrow a\ ,\ b)\ ,\ (p \rightarrow c\ ,\ d)\ =\ p \rightarrow a\ ,\ d \tag{F8}$$

7. Considere a função $\mathsf{in} = [\underline{0}, \mathsf{succ}]$ que exprime a forma como os números naturais são gerados a partir do número 0, de acordo com o diagrama seguinte,

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\underline{0}"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[d, "\mathsf{in}=[\underline{0},\mathsf{succ}]"] & \mathbb{N}_0 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "\mathsf{succ}"] \\
& \mathbb{N}_0 &
\end{tikzcd} \tag{F9}$$

onde $\mathsf{succ}\ n = n + 1$. Sabendo que o tipo 1 coincide com o tipo $()$ em Haskell e é habitado por um único elemento, também designado por $()$, calcule a inversa de in,

$\mathsf{out}\ 0 = i_1\ ()$
$\mathsf{out}\ (n + 1) = i_2\ n$

resolvendo em ordem a out a equação $\mathsf{out} \cdot \mathsf{in} = id$ e introduzindo variáveis. (NB: poderá deste cálculo inferir que in e out são isomorfismos? Justifique.)