Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC+MiEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2020/21

Exame da época especial — 14 de Julho de 2021
14h00–16h00 - Sala CP1-0.08

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Questão 1 Deduza o tipo mais geral da função undistr $= [id \times i_1 , id \times i_2]$ e verifique analiticamente a respectiva propriedade *grátis* (*natural*), inferindo-a primeiro através de um diagrama.

RESOLUÇÃO: undistr :: $A \times B + A \times C \rightarrow (A \times (B + C))$ logo (por diagrama, TPC)

$$(f \times (g + h)) \cdot \mathsf{undistr} = \mathsf{undistr} \cdot (f \times g + f \times h)$$

Verificação analítica:

$$
\begin{array}{ll}
& (f \times (g + h)) \cdot \mathsf{undistr} \\
= & \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& [(f \times (g + h)) \cdot (id \times i_1) , (f \times (g + h)) \cdot (id \times i_2)] \\
= & \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& [f \cdot id \times (g + h) \cdot i_1 , f \cdot id \times (g + h) \cdot i_2] \\
= & \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& [id \cdot f \times i_1 \cdot g , id \cdot f \times i_2 \cdot h] \\
= & \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& [(id \times i_1) \cdot (f \times g) , (id \times i_2) \cdot (f \times h)] \\
= & \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& \mathsf{undistr} \cdot (f \times g + f \times h)
\end{array}
$$

□

□

Questão 2 Demonstre a lei do condicional de McCarthy que se segue

$$p \rightarrow (q \rightarrow a \ , \ b) \ , \ b \quad = \quad (p \wedge q) \rightarrow a \ , \ b \tag{E1}$$

sabendo que

$$(p \wedge q)? \quad = \quad p \rightarrow q? \ , \ i_2 \tag{E2}$$

é uma propriedade da conjunção de predicados.

RESOLUÇÃO: Ter-se-á, pegando no lado direito da igualdade a provar:

$$
\begin{array}{ll}
 & (p \wedge q) \to a\ ,\ b \\
= & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & [a\,,b] \cdot (p \to q?\ ,\ i_2) \\
= & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & p \to ([a\,,b] \cdot q?)\ ,\ ([a\,,b] \cdot i_2) \\
= & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & p \to (q \to a\ ,\ b)\ ,\ b \\
\Box &
\end{array}
$$

$\Box$

Questão 3 Provar a igualdade $\overline{f \cdot (g \times h)} = \overline{\mathsf{ap} \cdot (id \times h)} \cdot \overline{f} \cdot g$ usando as leis das exponenciais e dos produtos.

RESOLUÇÃO:

$$
\begin{array}{ll}
 & \overline{f \cdot (g \times h)} \\
= & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \overline{f \cdot (id \times h)} \cdot g \\
= & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \overline{\mathsf{ap} \cdot (id \times h) \cdot (\overline{f} \times id)} \cdot g \\
= & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \overline{\mathsf{ap} \cdot (id \times h)} \cdot \overline{f} \cdot g
\end{array}
$$

$\Box$

Questão 4 Demonstre a seguinte propriedade do combinador catamorfismo: $(\!|\, g \,|\!) \cdot (\!|\, \mathsf{in} \cdot k \,|\!) = (\!|\, g \cdot k \,|\!)$ desde que $k \cdot \mathsf{F}\ f = \mathsf{F}\ f \cdot k$ se verifique.

RESOLUÇÃO: Por fusão-cata:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\!|\, g \,|\!) \cdot (\!|\, \mathsf{in} \cdot k \,|\!) = (\!|\, g \cdot k \,|\!) \\
\Leftarrow & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & (\!|\, g \,|\!) \cdot \mathsf{in} \cdot k = g \cdot k \cdot \mathsf{F}\ (\!|\, g \,|\!) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & g \cdot \mathsf{F}\ (\!|\, g \,|\!) \cdot k = g \cdot \mathsf{F}\ (\!|\, g \,|\!) \cdot k
\end{array}
$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$\mathit{true}$$

$\square$

$\square$

Questão 5 Considere uma série numérica definida por recorrência da seguinte forma:

$$s_0 = 1$$
$$s_{n+1} = 2 * s_n + n + 2$$

Assim, a lista $[1, 4, 11, 26, 57, 120, 247, 502, \ldots]$ mostra os primeiros termos da série. Demonstre, por aplicação da lei de recursividade mútua, que a seguinte função

$$\begin{array}{l} s = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ \mathit{loop}\ \mathsf{init}\ \mathbf{where} \\ \quad \mathit{loop}\ (x, y) = (2 * x + y, y + 1) \\ \quad \mathsf{init} = (1, 2) \end{array}$$

calcula o n-ésimo termo da série.

RESOLUÇÃO: Há várias maneiras de resolver esta questão. A que se apresenta a seguir faz "reverse engineering" do ciclo:

$$\mathit{loop}\ (x, y) = (2 * x + y, y + 1)$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$\mathit{loop} = \langle h, \mathsf{succ} \cdot \pi_2 \rangle\ \mathbf{where}\ h\ (x, y) = 2 * x + y$$

Então (completar as justificações):

$$s = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ \mathit{loop}\ \mathsf{init}$$

$$\equiv \quad \{ \text{ para algum } r \ \}$$

$$\langle s, r \rangle = \mathsf{for}\ \langle h, \mathsf{succ} \cdot \pi_2 \rangle\ (1, 2)$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$\langle s, r \rangle = (\!| [\underline{(1, 2)}, \langle h, \mathsf{succ} \cdot \pi_2 \rangle] |\!)$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$\langle s, r \rangle = (\!| \langle [\underline{1}, h], [\underline{2}, \mathsf{succ} \cdot \pi_2] \rangle |\!)$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s \cdot \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} = [\underline{1}, h] \cdot (id + \langle s, r \rangle) \\ r \cdot \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} = [\underline{2}, \mathsf{succ} \cdot \pi_2] \cdot (id + \langle s, r \rangle) \end{array} \right.$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s \cdot \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} = [\underline{1}, h \cdot \langle s, r \rangle] \\ r \cdot \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} = [\underline{2}, \mathsf{succ} \cdot r] \end{array} \right.$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} s\ 0 = 1 \\ s\ (n + 1) = 2 * (s\ n) + r\ n \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} r\ 0 = 2 \\ r\ (n + 1) = 1 + r\ n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\equiv \quad \{ \ r\ n = n + 2, \text{ pois } r\ 0 = 0 + 2 = 2 \text{ e } r\ (n+1) = (n+1) + 2 = 1 + (n+2) \ \}$$

$$\begin{cases} s\ 0 = 1 \\ s\ (n+1) = 2 * (s\ n) + n + 2 \end{cases}$$

□

Questão 6 Considere, definido em Haskell, o tipo

$$\mathbf{data}\ \mathsf{RTree}\ a = Ros\ a\ [\mathsf{RTree}\ a]$$

das habitualmente designadas "rose trees", que tem bifunctor de base $\mathsf{B}\ (X, Y) = X \times Y^*$ e

$$\mathsf{in} = \widehat{Ros}$$
$$\mathsf{out}\ (Ros\ a\ x) = (a, x)$$

É dada a definição da função

$$count = (\!|\ \mathsf{succ} \cdot \mathsf{sum} \cdot \pi_2\ |\!) \qquad \text{(E3)}$$

que conta o número de nós de uma "rose tree", onde sum é o catamorfismo que soma listas de números naturais. Mostre que

$$count \cdot (\mathsf{RTree}\ f) = count \qquad \text{(E4)}$$

se verifica, onde $\mathsf{RTree}\ f$ designa o functor do tipo RTree que aplica f a todos os nós de uma árvore.

RESOLUÇÃO: Tem-se:[1]

$$count \cdot (\mathsf{RTree}\ f) = count$$
$$\equiv \quad \{ \ B\ (f, id) = f \times id^* \ \}$$
$$(\!|\ \mathsf{succ} \cdot \mathsf{sum} \cdot \pi_2 \cdot (f \times id)\ |\!) = count$$
$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \}$$
$$count = count$$

□

□

Questão 7 O facto de haver tantos números pares como ímpares permite-nos pensar noutra forma de construir e manipular números naturais, nomeadamente usando — em vez de a habitual álgebra $\mathsf{in} = [\mathsf{zero}, \mathsf{succ}]$ — a alternativa $\mathsf{in}^\bullet$ que se segue

$$\begin{array}{l} \mathsf{in}^\bullet : \mathbb{N}_0 \leftarrow 1 + (\mathbb{N}_0 + \mathbb{N}_0) \\ \mathsf{in}^\bullet = [\mathsf{zero}, [\mathsf{par}, \mathsf{impar}]]\ \mathbf{where} \\ \quad \mathsf{par}\ n = 2 * n \\ \quad \mathsf{impar}\ n = 2 * n + 1 \\ \quad \mathsf{zero}\ \_ = 0 \end{array}$$

cujo functor é $\mathsf{F}\ f = id + (f + f)$. No exame de recurso viu-se como exprimir a conversão de um número natural para base 2

[1] Completar com as justificações.

$$
\begin{cases}
base_2\ 0 = [\,] \\
base_2\ (2\ n) = base_2\ n +\!\!+ [0] \\
base_2\ (2\ n+1) = base_2\ n +\!\!+ [1]
\end{cases}
$$

como um catamorfismo deste tipo:

$$base_2 = (\!|\,[\mathsf{nil}, [g\ 0, g\ 1]]\,|\!) \ \mathbf{where}\ g\ b\ w = w +\!\!+ [b] \tag{E5}$$

Mostre agora que a operação inversa

$$
\begin{array}{l}
base_{10}\ [\,] = 0 \\
base_{10}\ x = g\ (\mathsf{init}\ x, \mathsf{last}\ x)\ \mathbf{where} \\
\quad g\ (i, 0) = 2 * base_{10}\ i \\
\quad g\ (i, 1) = 2 * base_{10}\ i + 1
\end{array}
$$

é um anamorfismo do mesmo tipo, isto é identifique g em $base_{10} = [\!(g)\!]$. Justifique convenientemente a sua resposta, eg. sob a forma de um diagrama.

RESOLUÇÃO:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0{}^* \arrow[r, "out'"] \arrow[d, "base_{10}"'] & 1 + \mathbb{N}_0{}^* \times \mathbb{N}_0 \arrow[r, "id+g'"] & 1 + (\mathbb{N}_0{}^* + \mathbb{N}_0{}^*) \arrow[d, "id+(base_{10}+base_{10})"] \\
\mathbb{N}_0 & & 1 + (\mathbb{N}_0 + \mathbb{N}_0) \arrow[ll, "\mathsf{in}^{\bullet}"]
\end{tikzcd}
$$

onde:

$$
\begin{array}{l}
out'\ [\,] = i_1\ () \\
out'\ x = i_2\ (\mathsf{init}\ x, \mathsf{last}\ x) \\
g'\ (i, 0) = i_1\ i \\
g'\ (i, 1) = i_2\ i \\
base_{10} = [\!((id + g') \cdot out')\!]
\end{array}
$$

□

Questão 8 Com base em

$$
\begin{array}{l}
a \bullet x = \mathsf{map}\ (a*)\ x \\
x \diamond y = zipWith\ (+)\ x\ y \\
(k \otimes f)\ t = k\ t \bullet f\ t \\
(f \oplus g)\ t = f\ t \diamond g\ t
\end{array}
$$

defina-se a função:

$$
\begin{array}{l}
\alpha\ [p] = \underline{p} \\
\alpha\ x = (1-) \otimes \alpha\ (\mathsf{init}\ x) \oplus id \otimes \alpha\ (\mathsf{tail}\ x)
\end{array}
$$

Pretende demostrar-se que esta função é um hilomorfismo $\alpha = [\![c, a]\!]$. Sabendo que o seu tipo de entrada é paramétrico num tipo numérico genérico A, identifique: (a) o tipo de saída e de entrada de α; (b) a estrutura de dados intermédia (virtual) desse hilomorfismo; (c) os respectivos genes c e a. (Justifique convenientemente a sua resposta, eg. sob a forma de um diagrama.)

RESOLUÇÃO: Pela cláusula

$$\alpha\ [p] = \underline{p}$$

ficamos a saber que $\alpha : P^* \to P^X$ (P e X a apurar), pois a entrada é uma lista e a saída é uma função constante em P. Quanto à outra cláusula, faça-se:

$$\alpha\ x = (1-) \otimes \underbrace{\alpha\ (\mathsf{init}\ x)}_{a} \oplus id \otimes \underbrace{\alpha\ (\mathsf{tail}\ x)}_{b}$$

e

$$\beta\ (a, b) = (1-) \otimes a \oplus id \otimes b$$

isto é

$$\begin{aligned} \alpha\ x &= \beta\ (\alpha\ (\mathsf{init}\ x), \alpha\ (\mathsf{tail}\ x)) \\ \alpha &= \beta \cdot (\alpha \times \alpha) \cdot \langle \mathsf{init}, \mathsf{tail} \rangle \end{aligned}$$

Tipo de β:

$$\beta : {A^*}^{A^*} \times {A^*}^{A^*} \to {A^*}^{A^*}$$

Logo, para um dado P:

$$\begin{tikzcd} P^* \arrow[d, "\alpha"'] & ? + P^* \times P^* \arrow[d, "? + \alpha \times \alpha"] \\ {A^*}^{A^*} & ? + {A^*}^{A^*} \times {A^*}^{A^*} \arrow[l, "c = [?\,, \beta]"] \end{tikzcd}$$

A outra cláusula, $\alpha\ [p] = \underline{p}$, diz-nos que $P = A^*$. Logo:

$$\begin{tikzcd} A^{**} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\alpha"'] & A^* + A^{**} \times A^{**} \arrow[d, "id + \alpha \times \alpha"] \\ {A^*}^{A^*} & A^* + {A^*}^{A^*} \times {A^*}^{A^*} \arrow[l, "c = [\underline{\cdot}\,, \beta]"] \end{tikzcd}$$

Daqui apuramos $\mathsf{B}\ (X, Y) = X + Y^2$. Logo o tipo intermédio será $\mathsf{LTree}\ A^*$. Finalmente, assumindo listas não vazias à entrada:

$$\begin{aligned} &a\ [p] = i_1\ p \\ &a\ x = (i_2 \cdot \langle \mathsf{init}, \mathsf{tail} \rangle)\ x \end{aligned}$$

$\square$
