Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC+MiEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2020/21

Exame de Recurso — 22 de Junho de 2021
15h15–17h15 - Salas CP1-0.08 e Cantina

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Questão 1 Verifique se a igualdade

$$[id \times i_1 , id \times i_2] = \langle \pi_1 \cdot \nabla, \pi_2 + \pi_2 \rangle \tag{E1}$$

é verdadeira, para $\nabla = [id , id]$.

RESOLUÇÃO: Propõe-se:

$$
\begin{array}{ll}
& \langle \pi_1 \cdot \nabla, \pi_2 + \pi_2 \rangle \\
= & \quad \{ \ \nabla = [id , id]\text{; fusão-+; soma de funções } \} \\
& \langle [\pi_1 , \pi_1], [i_1 \cdot \pi_2 , i_2 \cdot \pi_2] \rangle \\
= & \quad \{ \text{ lei da troca } \} \\
& [\langle \pi_1, i_1 \cdot \pi_2 \rangle , \langle \pi_1, i_2 \cdot \pi_2 \rangle] \\
= & \quad \{ \text{ definição de produto de funções } \} \\
& [id \times i_1 , id \times i_2] \\
\Box &
\end{array}
$$

$\Box$

Questão 2 Deduza o tipo mais geral da função $\alpha = (id + \pi_1) \cdot \pi_2$ e infira a respectiva propriedade *grátis* (*natural*) através de um diagrama.

RESOLUÇÃO: Vamos partir de

$$
\left\{
\begin{array}{l}
A \xleftarrow{id} A \\
B \xleftarrow{\pi_1} B \times C \\
E \xleftarrow{\pi_2} D \times E
\end{array}
\right.
\quad \text{de onde tiramos} \quad A + B \xleftarrow{id+\pi_1} A + B \times C \ \text{ e } E = A + B \times C
$$

Logo $\alpha = (id + \pi_1) \cdot \pi_2$ terá tipo:

$$A + B \xleftarrow{\alpha} D \times (A + B \times C)$$

Feito um diagrama (TPC) em que se associem

f a A
g a B
h a C
k a D

ter-se-á:

$$(f + g) \cdot \alpha = \alpha \cdot (k \times (f + g \times h))$$

$\square$

Questão 3 Considere o isomorfismo de ordem superior

$$\begin{tikzcd} A^{B+C} \arrow[rr, bend left, "\mathsf{unjoin}"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & A^B \times A^C \arrow[ll, bend left, "\mathsf{join}"] \end{tikzcd} \tag{E2}$$

onde

$\mathsf{join}\ (f, g) = [f\,, g]$
$\mathsf{unjoin}\ k = (k \cdot i_1, k \cdot i_2)$

Mostre que $\mathsf{join} \cdot \mathsf{unjoin} = id$ e que $\mathsf{unjoin} \cdot \mathsf{join} = id$.

RESOLUÇÃO: Primeira igualdade:[1]

$$\begin{array}{ll} & \mathsf{join} \cdot \mathsf{unjoin} = id \\ \equiv & \{ \ \dots\dots\dots\dots \ \} \\ & \mathsf{join}\ (\mathsf{unjoin}\ k) = k \\ \equiv & \{ \ \dots\dots\dots\dots \ \} \\ & [k \cdot i_1\,, k \cdot i_2] = k \\ \equiv & \{ \ \dots\dots\dots\dots \ \} \\ & k \cdot [i_1\,, i_2] = k \\ \equiv & \{ \ \dots\dots\dots\dots \ \} \\ & k = k \end{array}$$

$\square$

Segunda igualdade:

$$\begin{array}{ll} & \mathsf{unjoin} \cdot \mathsf{join} = id \\ \equiv & \{ \ \dots\dots\dots\dots \ \} \\ & \mathsf{unjoin}\ (\mathsf{join}\ (f, g)) = (f, g) \\ \equiv & \{ \ \dots\dots\dots\dots \ \} \\ & \mathsf{unjoin}\ [f\,, g] = (f, g) \end{array}$$

[1]Completar com as justificações.

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$([f, g] \cdot i_1, [f, g] \cdot i_2) = (f, g)$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$(f, g) = (f, g)$$

□

□

Questão 4 O facto de haver tantos números pares como ímpares permite-nos pensar noutra forma de construir e manipular números naturais, nomeadamente usando — em vez da habitual álgebra $\mathsf{in} = [\mathsf{zero}, \mathsf{succ}]$ — a alternativa $\mathsf{in}^\bullet$ que se segue

$$\begin{array}{l}
\mathsf{in}^\bullet : \mathbb{N}_0 \leftarrow 1 + (\mathbb{N}_0 + \mathbb{N}_0) \\
\mathsf{in}^\bullet = [\mathsf{zero}, [\mathsf{par}, \mathsf{impar}]] \ \textbf{where} \\
\quad \mathsf{par}\ n = 2\ n \\
\quad \mathsf{impar}\ n = 2\ n + 1 \\
\quad \mathsf{zero}\ _ = 0
\end{array}$$

cujo functor é $\mathsf{F}\ f = id + (f + f)$. Mostre que definir o catamorfismo

$$base2 = (\!|\, [\mathsf{nil}, [g\ 0, g\ 1]] \,|\!) \ \textbf{where}\ g\ b\ w = w +\!\!+ [b] \tag{E3}$$

corresponde a definir a função:

$$\left\{\begin{array}{l}
base2\ 0 = [\,] \\
base2\ (2\ n) = base2\ n +\!\!+ [0] \\
base2\ (2\ n + 1) = base2\ n +\!\!+ [1]
\end{array}\right.$$

RESOLUÇÃO: Tem-se:[2]

$$base2 = (\!|\, [\mathsf{nil}, [g\ 0, g\ 1]] \,|\!)$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$base2 \cdot [\mathsf{zero}, [\mathsf{par}, \mathsf{impar}]] = [\mathsf{nil}, [g\ 0, g\ 1]] \cdot (id + (base2 + base2))$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
base2 \cdot \mathsf{zero} = \mathsf{nil} \\
base2 \cdot \mathsf{par} = g\ 0 \cdot base2 \\
base2 \cdot \mathsf{impar} = (g\ 1) \cdot base2
\end{array}\right.$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
base2\ 0 = [\,] \\
base2\ (2\ n) = base2\ n +\!\!+ [0] \\
base2\ (2\ n + 1) = base2\ n +\!\!+ [1]
\end{array}\right.$$

□

---

[2]Completar com as justificações.

Questão 5 O número de movimentos que solucionam o "puzzle" das Torres de Hanoi, com n discos, é dado por

$$k\ n = 2^n - 1$$

Mostre (recorrendo à lei de recursividade mútua) que uma forma de calcular k é

$$k = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ (0,1)\ \mathbf{where}\ loop\ (k,e) = (k+e, 2*e)$$

sabendo que: (a) $2^n = \mathsf{for}\ (2*)\ 1\ n$; (b) k satisfaz as equações

$$\begin{array}{l} k\ 0 = 0 \\ k\ (n+1) = 2^n + k\ n \end{array}$$

(como facilmente se prova).

RESOLUÇÃO: Convertendo $loop\ (k,e) = (k+e, 2*e)$ para $loop = \langle \mathsf{add}, (2*) \cdot \pi_2 \rangle$, seja $g = \mathsf{for}\ loop\ (0,1)$ em: [3]

$$\begin{array}{ll}
& g = \mathsf{for}\ \langle \mathsf{add}, (2*) \cdot \pi_2 \rangle\ (0,1) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& g = (\!| [\langle \underline{0}, \underline{1} \rangle, \langle \mathsf{add}, (2*) \cdot \pi_2 \rangle] |\!) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& g = (\!| \langle [\underline{0}, \mathsf{add}], [\underline{1}, (2*) \cdot \pi_2] \rangle |\!) \\
\equiv & \quad \{ \ k = \pi_1 \cdot g, \text{ para } h = \pi_2 \cdot g \ \} \\
& \langle k, h \rangle = (\!| \langle [\underline{0}, \mathsf{add}], [\underline{1}, (2*) \cdot \pi_2] \rangle |\!) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} k \cdot \mathsf{in} = [\underline{0}, \mathsf{add} \cdot (id + \langle k, h \rangle)] \\ h \cdot \mathsf{in} = [\underline{1}, (2*) \cdot \pi_2] \cdot (id + \langle k, h \rangle) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} k\ 0 = 0 \\ k\ (n+1) = k\ n + h\ n \end{array} \right. \\ h \cdot \mathsf{in} = [\underline{1}, (2*)] \cdot (id + h) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} k\ 0 = 0 \\ k\ (n+1) = k\ n + h\ n \end{array} \right. \\ h\ n = 2^n \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} k\ 0 = 0 \\ k\ (n+1) = 2^n + k\ n \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& k\ n = 2^n - 1 \\
\square &
\end{array}$$

Pointwise:

$$\begin{array}{l} g\ 0 = (0,1) \\ g\ (n+1) = (k+e, 2*e)\ \mathbf{where}\ (k,e) = g\ n \end{array}$$

$\square$

---

[3] Completar com as justificações.

Questão 6 Considere, definido em Haskell, o tipo

$$\mathbf{data}\ RTree\ a = Ros\ a\ [RTree\ a]$$

das habitualmente designadas "rose trees", que tem bifunctor de base $\mathsf{B}\,(X, Y) = X \times Y^*$ e

$$\begin{array}{l} \mathsf{in} = \widehat{Ros} \\ \mathsf{out}\,(Ros\ a\ x) = (a, x) \end{array}$$

Dada a definição da função

$$mirror = (\!|\, \mathsf{in} \cdot (id \times reverse)\, |\!) \tag{E4}$$

que "espelha" uma "rose tree", mostre que

$$mirror \cdot mirror = id \tag{E5}$$

NB: não precisa de demonstrar a propriedade $reverse \cdot reverse = id$, case precise dela.

RESOLUÇÃO: Tem-se:[4]

$$\begin{array}{ll}
& mirror \cdot mirror = id \\
\equiv & \{ \quad \dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& mirror \cdot (\!|\, \mathsf{in} \cdot (id \times reverse)\, |\!) = (\!|\, \mathsf{in}\, |\!) \\
\Leftarrow & \{ \quad \dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& mirror \cdot \mathsf{in} \cdot (id \times reverse) = \mathsf{in} \cdot (id \times \mathsf{map}\ mirror) \\
\equiv & \{ \quad \dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& \mathsf{in} \cdot (id \times reverse) \cdot (id \times \mathsf{map}\ mirror) \cdot (id \times reverse) = \mathsf{in} \cdot (id \times \mathsf{map}\ mirror) \\
\equiv & \{ \quad \dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& id \times reverse \cdot \mathsf{map}\ mirror \cdot reverse = id \times \mathsf{map}\ mirror \\
\equiv & \{ \quad \dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& id \times \mathsf{map}\ mirror \cdot reverse \cdot reverse = id \times \mathsf{map}\ mirror \\
\equiv & \{ \quad \dots\dots\dots\dots \quad \} \\
& id \times \mathsf{map}\ mirror = id \times \mathsf{map}\ mirror \\
\Box &
\end{array}$$

$\Box$

Questão 7 Mostre que o catamorfismo de listas $\mathsf{length} = (\!|\, [\mathsf{zero}, \mathsf{succ} \cdot \pi_2]\, |\!)$ é a mesma função que o *anamorfismo* de naturais $[\!(\, (id + \pi_2) \cdot \mathsf{out}_{\mathsf{List}}\,)\!]$.

---

[4] Completar com as justificações.

RESOLUÇÃO: Tem-se:[5]

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathsf{length} = (\![[\mathsf{zero}\,, \mathsf{succ} \cdot \pi_2]]\!) \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \mathsf{length} \cdot \mathsf{in}_{\mathsf{List}} = [\mathsf{zero}\,, \mathsf{succ}] \cdot (id + \pi_2) \cdot (id + id \times \mathsf{length}) \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \mathsf{length} \cdot \mathsf{in}_{\mathsf{List}} = [\mathsf{zero}\,, \mathsf{succ}] \cdot (id + \mathsf{length}) \cdot (id + \pi_2) \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \mathsf{length} = [\mathsf{zero}\,, \mathsf{succ}] \cdot (id + \mathsf{length}) \cdot (id + \pi_2) \cdot \mathsf{out}_{\mathsf{List}} \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \mathsf{length} = [\![(id + \pi_2) \cdot \mathsf{out}_{\mathsf{List}}]\!] \\
\Box &
\end{array}
$$

□

Questão 8 É sabido que, sempre que um ciclo-*while* termina, pode ser definido pela função

$$\textbf{while}\ p\ f = \textbf{tailr}\ ((id + f) \cdot (\neg \cdot p)?)$$

recorrendo ao combinador de *"tail recursion"* $\textbf{tailr}\ f = [\![\nabla, f]\!]$, que é um hilomorfismo de base $\mathsf{B}\ (X, Y) = X + Y$, para $\nabla = [id\,, id]$. Complete a demonstração da lei de fusão de **tailr**[6]

$$(\textbf{tailr}\ g) \cdot f = \textbf{tailr}\ h \quad \Leftarrow \quad g \cdot f = (id + f) \cdot h \tag{E6}$$

que se segue:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\textbf{tailr}\ g) \cdot f = \textbf{tailr}\ h \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \vdots \\
\Leftarrow & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \vdots \\
 & g \cdot f = (id + f) \cdot h
\end{array}
$$

RESOLUÇÃO: Tal como já apareceu na ficha:[7]

$$
\begin{array}{ll}
 & (\textbf{tailr}\ g) \cdot f = \textbf{tailr}\ h \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & (\!| \nabla |\!) \cdot [\!(g)\!] \cdot f = (\!| \nabla |\!) \cdot [\!(h)\!] \\
\Leftarrow & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & [\!(g)\!] \cdot f = [\!(h)\!] \\
\Leftarrow & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & g \cdot f = (id + f) \cdot h \\
\Box &
\end{array}
$$

[5] Completar com as justificações.
[6] **NB**: Assume-se que $(\textbf{tailr}\ g) \cdot f$ termina.
[7] Completar com as justificações.