Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC+MiEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2020/21

Teste — 2 de Junho de 2021
15h30–17h30
Salas CP2-0.28, CP2-0.32 e Cantina

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Questão 1 Mostre que a equação em θ

$$\theta \cdot \mathsf{distl} = [f\,, g] \times h \qquad \text{(E1)}$$

só tem uma solução: $\theta = [f \times h\,, g \times h]$. **NB:** recorde que o isomorfismo distl tem $[i_1 \times id, i_2 \times id]$ como converso.

RESOLUÇÃO: Tem-se:[1]

$$\begin{array}{ll}
 & \theta \cdot \mathsf{distl} = [f\,, g] \times h \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \theta = ([f\,, g] \times h) \cdot [i_1 \times id, i_2 \times id] \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \theta = [([f\,, g] \times h) \cdot (i_1 \times id), ([f\,, g] \times h) \cdot (i_2 \times id)]) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \theta = [[f\,, g] \cdot i_1 \times h, [f\,, g] \cdot i_2 \times h] \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \theta = [f \times h, g \times h] \\
\Box &
\end{array}$$

$\Box$

Questão 2 Identifique, apoiando a sua resolução num diagrama, qual é a definição da função polimórfica α cuja propriedade natural ("grátis") é:

$$(f + h) \cdot \alpha \quad = \quad \alpha \cdot (f + g \times h)$$

[1] Completar com as justificações.

RESOLUÇÃO: De

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[d, "f+h"'] & \cdots \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "f+g\times h"] \\ \cdots & \cdots \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

fazendo a correspondência $f \mapsto A, g \mapsto B, h \mapsto C$ ter-se-á:

$$\begin{tikzcd} A + C \arrow[d, "f+h"'] & A + B \times C \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "f+g\times h"] \\ A' + C' & A' + B' \times C' \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

Logo $A + B \times C \xrightarrow{\alpha} A + C$ será da forma $\alpha = [f\,, g]$ onde $f : A \to A + C$ e $g : B \times C \to A + C$. Como nada sabemos sobre A, B e C, só há as soluções

$$\begin{cases} f = i_1 \\ g = i_2 \cdot \pi_2 \end{cases}$$

Logo $\alpha = [i_1\,, i_2 \cdot \pi_2] = id + \pi_2$. $\square$

Questão 3 Demonstre a 2ª-lei do combinador condicional de McCarthy:

$$(p \to f\ ,\ g) \cdot h \quad = \quad (p \cdot h) \to (f \cdot h), (g \cdot h)$$

RESOLUÇÃO: Tem-se:[2]

$$\begin{array}{ll} & (p \to f\ ,\ g) \cdot h \\ = & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\ & [f\,, g] \cdot p? \cdot h \\ = & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\ & [f\,, g] \cdot (h + h) \cdot (p \cdot h)? \\ = & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\ & [f \cdot h\,, g \cdot h] \cdot (p \cdot h)? \\ = & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\ & p \cdot h \to f \cdot h\ ,\ g \cdot h \end{array}$$

$\square$

Questão 4 Considere o isomorfismo de ordem superior *flip* definido pela composição de isomorfismos seguinte:

$$\begin{array}{ccccccc} (C^B)^A & \cong & C^{A\times B} & \cong & C^{B\times A} & \cong & (C^A)^B \\ f & \mapsto & \widehat{f} & \mapsto & \widehat{f}.\mathsf{swap} & \mapsto & \overline{\widehat{f} \cdot \mathsf{swap}} = \mathit{flip}\ f \end{array}$$

[2]Completar com as justificações.

Mostre que *flip*, acima definida por $\mathit{flip}\ f = \overline{\widehat{f} \cdot \mathsf{swap}}$, é um isomorfismo por ser a sua própria inversa, isto é, por

$$\mathit{flip}\ (\mathit{flip}\ f) = f \tag{E2}$$

se verificar.

RESOLUÇÃO: Tem-se:[3]

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathit{flip}\ (\mathit{flip}\ f)) = f \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
 & \mathit{flip}\ \overline{\widehat{f} \cdot \mathsf{swap}} = f \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
 & \overline{\widehat{\overline{\widehat{f} \cdot \mathsf{swap}}} \cdot \mathsf{swap}} = f \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
 & \overline{\widehat{f}\ \mathsf{swap} \cdot \mathsf{swap}} = f \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
 & \overline{\widehat{f} \cdot id} = f \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
 & f = f \\
\square &
\end{array}
$$

□

Questão 5 Seja

$$\mathit{com}\ n\ p = \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array}\right)$$

a função que calcula o número de combinações de n objectos tomados p a p, para $n \geqslant p \geqslant 0$. Pode mostrar-se que:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathit{com}\ n\ 0 = 1 \\ \mathit{com}\ n\ (p+1) = \frac{n-p}{p+1} \times (\mathit{com}\ n\ p) \end{array}\right. \tag{E3}$$

Mostre, por aplicação da lei de recursividade mútua, que a seguinte implementação da função com

$$
\begin{array}{l}
\mathit{com}\ n = \pi_2 \cdot (\mathit{aux}\ n)\ \mathbf{where} \\
\quad \mathit{aux}\ n = \mathsf{for}\ (\mathit{loop}\ n)\ (0,1) \\
\quad \mathit{loop}\ n\ (p,c) = (p+1, (n-p) * c \div (p+1))
\end{array}
$$

é equivalente a (E3).

RESOLUÇÃO: Por inspecção de (E3) vemos que a função $\mathit{com}\ n$ está em recursividade com o termo $\frac{n-p}{p+1}$, isto é, que

$$\left\{\begin{array}{l} \mathit{com}\ n\ 0 = 1 \\ \mathit{com}\ n\ (p+1) = \theta\ n\ (p, \mathit{com}\ n\ p) \end{array}\right.$$

[3] Completar com as justificações.

onde $\theta\ n\ (p,c) = \frac{n-p}{p+1} \times c$. Logo:

$$com\ n \cdot \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} = [\mathsf{one}, \theta\ n] \cdot (id + \langle id, com\ n\rangle)$$
$$id = (\!|\, \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} |\!)$$

Como $id = (\!|\, \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} |\!) \Leftrightarrow id \cdot \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} = \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} \cdot (id + id) \Leftrightarrow \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} \cdot (id + \pi_1 \cdot \langle id, com\ n\rangle)$ ter-se-á:

$$\begin{array}{ll} & \langle id, com\ n\rangle = (\!|\, \langle [\mathsf{zero}, \mathsf{succ} \cdot \pi_1], [\mathsf{one}, \theta\ n]\rangle |\!) \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \langle id, com\ n\rangle = (\!|\, [\underline{(0,1)}, \langle \mathsf{succ} \cdot \pi_1, \theta\ n\rangle] |\!) \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \langle id, com\ n\rangle = \mathsf{for}\ \langle \mathsf{succ} \cdot \pi_1, \theta\ n\rangle\ (0,1) \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \langle id, com\ n\rangle = \mathsf{for}\ loop\ n\ (0,1)\ \mathbf{where}\ loop\ n\ (p,c) = (p+1, \dfrac{n-p}{p+1} \times c) \end{array}$$

$\square$

Basta definir $aux\ n = \langle id, com\ n\rangle$ e ter-se á $com\ n = \pi_2 \cdot aux$ como pedido. $\square$

Questão 6 Derive a versão *pointwise* do seguinte catamorfismo de BTrees,

$$\begin{array}{l} tar = (\!|\, [\mathsf{singl} \cdot \mathsf{nil}, g] |\!)\ \mathbf{where} \\ \quad g = \mathsf{map}\ \mathsf{cons} \cdot lstr \cdot (id \times \mathsf{conc}) \\ \quad lstr\ (b,x) = [(b,a) \mid a \leftarrow x] \end{array}$$

entregando no final uma versão da função em que não ocorrem os nomes das funções map, cons, singl, nil, conc e *lstr*.
NB: recorda-se o tipo $\mathbf{data}\ \mathsf{BTree}\ a = Empty \mid Node\ (a, (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a))$ tal como definido em Haskell, nas aulas, com base $\mathsf{B}\ (X,Y) = 1 + X \times Y^2$ e álgebra de construção $\mathsf{in} = [\underline{Empty}, Node]$. Recorda-se ainda $\mathsf{map}\ f\ x = [f\ a \mid a \leftarrow x]$ como definição *pointwise* de map em listas.

RESOLUÇÃO: Tem-se:[4]

$$\begin{array}{ll} & tar = (\!|\, [\mathsf{singl} \cdot \mathsf{nil}, g] |\!) \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} tar \cdot \underline{Empty} = \mathsf{singl} \cdot \mathsf{nil} \\ tar \cdot Node = (\mathsf{map}\ \mathsf{cons} \cdot lstr \cdot (id \times \mathsf{conc})) \cdot (id \times (tar \times tar)) \end{array} \right. \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} tar\ Empty = [[\,]] \\ tar \cdot Node = \mathsf{map}\ \mathsf{cons} \cdot lstr \cdot (id \times \mathsf{conc} \cdot (tar \times tar)) \end{array} \right. \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} tar\ Empty = [[\,]] \\ tar\ (Node\ (a,(t_1,t_2))) = (\mathsf{map}\ \mathsf{cons} \cdot lstr)\ (a, \mathsf{conc}\ (tar\ t_1, tar\ t_2)) \end{array} \right. \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} tar\ Empty = [[\,]] \\ tar\ (Node\ (a,(t_1,t_2))) = \mathsf{map}\ \mathsf{cons}\ [(a,b) \mid b \leftarrow tar\ t_1 +\!\!+\ tar\ t_2] \end{array} \right. \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} tar\ Empty = [[\,]] \\ tar\ (Node\ (a,(t_1,t_2))) = [a : b \mid b \leftarrow tar\ t_1 +\!\!+\ tar\ t_2] \end{array} \right. \end{array}$$

[4] Completar com as justificações.

$\square$

Questão 7 Considere o catamorfismo

$$count\ p = (\![\,[(p \rightarrow \underline{1}\ ,\ \underline{0})\,,\mathsf{add}]\,]\!)\ \textbf{where}\ \mathsf{add} = \widehat{(+)} \tag{E4}$$

que conta as folhas de uma árvore de tipo LTree que satisfazem o predicado p e o isomorfismo:

$$\mathsf{mirror} = (\!|\,\mathsf{in}\cdot(id + \mathsf{swap})\,|\!) \tag{E5}$$

Mostre que $count\ p$ é invariante em relação a rotações da árvore, isto é, que

$$count\ p \cdot \mathsf{mirror} = count\ p \tag{E6}$$

NB: recorda-se que LTree X tem por base $\mathsf{B}\ (X, Y) = X + Y^2$ e $\mathsf{in} = [Leaf\ , Fork]$.

RESOLUÇÃO: Tem-se:[5]

$$
\begin{array}{cl}
 & count\ p \cdot \mathsf{mirror} = count\ p \\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
 & count\ p \cdot (\!|\,\mathsf{in}\cdot(id+\mathsf{swap})\,|\!) = (\!|\,[(p \rightarrow \underline{1}\ ,\ \underline{0})\,,\mathsf{add}]\,|\!) \\
\Leftarrow & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
 & count\ p \cdot \mathsf{in}\cdot(id+\mathsf{swap}) = [(p \rightarrow \underline{1}\ ,\ \underline{0})\,,\mathsf{add}]\cdot \mathsf{F}\ (count\ p) \\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
 & [(p \rightarrow \underline{1}\ ,\ \underline{0})\,,\mathsf{add}]\cdot \mathsf{F}\ (count\ p)\cdot(id+\mathsf{swap}) = [p \rightarrow \underline{1}\ ,\ \underline{0},\mathsf{add}]\cdot \mathsf{F}\ (count\ p) \\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
 & [(p \rightarrow \underline{1}\ ,\ \underline{0})\,,\mathsf{add}]\cdot(id+(count\ p)^2)\cdot(id+\mathsf{swap}) = [p \rightarrow \underline{1}\ ,\ \underline{0},\mathsf{add}]\cdot(id+(count\ p)^2) \\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
 & ([(p \rightarrow \underline{1}\ ,\ \underline{0})\,,\mathsf{add}\cdot(count\ p)^2\cdot(id+\mathsf{swap})] = [p \rightarrow \underline{1}\ ,\ \underline{0},\mathsf{add}\cdot(count\ p)^2] \\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
 & \mathsf{add}\cdot(count\ p)^2\cdot\mathsf{swap} = \mathsf{add}\cdot(count\ p)^2 \\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
 & \mathsf{add}\cdot\mathsf{swap}\cdot(count\ p)^2 = \mathsf{add}\cdot(count\ p)^2 \\
\Leftarrow & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
 & \mathsf{add}\cdot\mathsf{swap} = \mathsf{add} \\
\square &
\end{array}
$$

$\square$

Questão 8 O seguinte programa em Haskell

$pbin :: Ord\ p \Rightarrow p \rightarrow [p] \rightarrow \mathbb{B}$
$pbin\ a\ db = loop\ (0, \mathsf{length}\ db - 1)\ \textbf{where}$

[5] Completar com as justificações.

$$
\begin{array}{l}
\mathit{loop}\ (l, r) \\
\quad \mid l > r \quad = \mathsf{False} \\
\quad \mid a < a' = \mathit{loop}\ (l, m-1) \\
\quad \mid a > a' = \mathit{loop}\ (m+1, r) \\
\quad \mid \mathsf{otherwise} = \mathsf{True} \quad \text{-- a=a'} \\
\quad \mathbf{where}\ m = (l + r) \div 2 \\
\qquad a' = db\ !!\ m
\end{array}
$$

implementa o algoritmo de pesquisa binária sobre uma lista ordenada. Mostre que $\mathit{loop} = [\![f, g]\!]$, identificando os dois genes f e g do hilomorfismo e o bifunctor do tipo indutivo intermédio. **Sugestão**: recorde o combinador **tailr**.

RESOLUÇÃO: Seguindo a sugestão dada de se tentar usar o combinador $\mathbf{tailr} = [\![[id, id], g]\!]$, fazendo $\mathit{loop} = \mathbf{tailr}\ d$, ter-se-á de imediato $f = [id, id]$. Quanto a g, a função surge quando re-escrevemos o código dado usando **tailr**:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{pbin}\ a\ db = \mathit{loop}\ (0, \mathsf{length}\ db - 1)\ \mathbf{where} \\
\quad \mathit{loop} = \mathbf{tailr}\ g \\
\quad g\ (l, r) \\
\qquad \mid l > r \quad = i_1\ \mathsf{False} \\
\qquad \mid a < a' = i_2\ (l, m-1) \\
\qquad \mid a > a' = i_2\ (m+1, r) \\
\qquad \mid \mathsf{otherwise} = i_1\ \mathsf{True} \quad \text{-- a=a'} \\
\qquad \mathbf{where}\ m = (l + r) \div 2 \\
\qquad\quad a' = db\ !!\ m
\end{array}
$$

□
